



## ESTUDO DE MODOS ACÚSTICOS EM RAMIFICAÇÃO DE DUTO CILÍNDRICO UTILIZANDO FUNÇÕES DE GREEN

Lucas Rodrigues Soares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Ricardo Eduardo Musafir

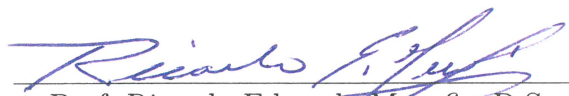
Rio de Janeiro  
Junho de 2018

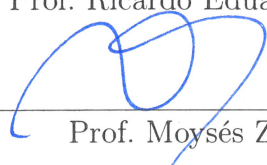
ESTUDO DE MODOS ACÚSTICOS EM RAMIFICAÇÃO DE DUTO  
CILÍNDRICO UTILIZANDO FUNÇÕES DE GREEN

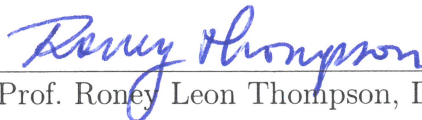
Lucas Rodrigues Soares

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA  
MECÂNICA.

Examinada por:

  
Prof. Ricardo Eduardo Musafir, D.Sc.

  
Prof. Moysés Zindeluk, D.Sc.

  
Prof. Roney Leon Thompson, D.Sc.

  
Prof. Júlio Cesar Boscher Torres, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
JUNHO DE 2018

ESTUDO DE MODOS ACÚSTICOS EM RAMIFICAÇÃO DE DUTO  
CILÍNDRICO UTILIZANDO FUNÇÕES DE GREEN

Lucas Rodrigues Soares

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA  
MECÂNICA.

Examinada por:

---

Prof. Ricardo Eduardo Musafir, D.Sc.

---

Prof. Moysés Zindeluk, D.Sc.

---

Prof. Roney Leon Thompson, D.Sc.

---

Prof. Júlio Cesar Boscher Torres, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
JUNHO DE 2018

Soares, Lucas Rodrigues

Estudo de modos acústicos em ramificação de duto cilíndrico utilizando funções de Green /Lucas Rodrigues Soares. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

X, 107 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Ricardo Eduardo Musafir

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Mecânica, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 84 – 96.

1. Aeroacústica. 2. Oscilações acústicas. 3. Geração e propagação sonora. 4. Interação entre modos. I. Musafir, Ricardo Eduardo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*(... you werent born to live like  
brutes, but to pursue virtue and  
knowledge...) (Dante, The Divine  
Comedy, Canto XXVI 119-120).*

# Agradecimentos

Ao Professor Ricardo Musafir agradeço pela orientação, supervisão e paciência, que possibilitaram a realização desta dissertação.

Aos professores do Programa de Engenharia Mecânica da COPPE/UFRJ, meus agradecimentos pelos conhecimentos passados e exemplos transmitidos.

Ao Professor Sjoerd W. Rienstra, da Eindhoven University of Technology, agradeço pela prestatividade no esclarecimento de algumas questões das funções de Bessel.

Aos amigos, agradeço pelas boas lembranças e companheirismo, longe e próximos ao mesmo tempo.

À PETROBRAS, agradeço pela liberação e imprescindível apoio na realização deste trabalho.

À minha família agradeço pelo apoio, compreensão e incentivo. Em especial, para minha querida mãe, Ana, e minha irmã, Bárbara, que sempre acreditaram e possibilitaram, mesmo longe, que este trabalho pudesse ser feito.

Finalmente, agradeço à Ana Karla, minha esposa, pelo imenso amor, carinho e compreensão, sem a qual todo o trabalho não faria sentido.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## ESTUDO DE MODOS ACÚSTICOS EM RAMIFICAÇÃO DE DUTO CILÍNDRICO UTILIZANDO FUNÇÕES DE GREEN

Lucas Rodrigues Soares

Junho/2018

Orientador: Ricardo Eduardo Musafir

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho investiga a propagação de ruído em escoamentos internos e a possibilidade de acoplamento entre modos acústicos de ordens diferentes, em uma ramificação simples, de um duto de seção circular. Uma equação da onda para a flutuação da pressão, incluindo viscosidade é desenvolvida. A função de Green para o operador encontrado é obtida no domínio da frequência. Uma expressão para a interação entre modos na ramificação, em termos de funções de Bessel, resultante de uma onda plana incidente no duto principal, é obtida através de uma integral de convolução entre a função de Green e a componente axial da flutuação de velocidade. Mostra-se uma interação entre os modos radiais através da integral do produto de funções de Bessel resultante.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## STUDY OF ACOUSTIC MODES IN A SIDE BRANCH OF A CYLINDRICAL DUCT USING GREEN FUNCTIONS

Lucas Rodrigues Soares

June/2018

Advisor: Ricardo Eduardo Musafir

Department: Mechanical Engineering

In this work, we investigate the propagation of sound in internal flows and the possibility of coupling between different modes in a side-branch of a hard walled duct. A convected wave equation for the pressure fluctuation, including viscosity effects is developed. The Green function for the wave operator is obtained in the frequency domain. An expression for the interaction of modes in the side branch is developed, in terms of Bessel functions, as a result of a plane wave incident in the main duct, by considering a convolution integral between the Green function and the axial component of the velocity fluctuation. The interaction of radial modes is demonstrated through the resulting integral of product of Bessel functions.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Geração e propagação do som em escoamentos</b>	<b>5</b>
2.1 Conceitos preliminares . . . . .	5
2.1.1 Equações de balanço . . . . .	5
2.1.2 Formulação por funções de Green . . . . .	6
2.1.3 Convolução de funções e transformação de Fourier . . . . .	8
2.2 Aeroacústica . . . . .	9
2.3 Vorticidade e ressonância em escoamentos internos . . . . .	14
2.4 Geração e propagação sonora em dutos . . . . .	16
2.4.1 Estudos sobre propagação sonora . . . . .	17
2.4.2 Efeito das descontinuidades geométricas na propagação . . . . .	21
2.5 Relação entre modos acústicos de ordem superior e a vibração da tubulação . . . . .	26
<b>3 Uma equação de onda convectada</b>	<b>30</b>
3.1 Introdução . . . . .	30
3.2 Equação da onda convectada . . . . .	30
3.3 Solução da equação convectada . . . . .	32
3.3.1 Condição de contorno . . . . .	35
3.3.2 Relação de dispersão . . . . .	37
3.3.3 Expressão para a flutuação da pressão . . . . .	40
3.3.4 Influência da frequência nos termos de viscosidade . . . . .	41
3.3.5 Influência do número de Helmholtz na equação (3.6) . . . . .	42
3.3.6 Influência dos efeitos térmicos . . . . .	43
<b>4 Função de Green</b>	<b>45</b>
4.1 Obtenção da função de Green . . . . .	45
4.1.1 Condição de contorno . . . . .	47
4.1.2 Cálculo dos resíduos . . . . .	47

4.1.3	Contorno de integração . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Campo de velocidade</b>	<b>53</b>
5.1	Equações para o campo de velocidade . . . . .	53
5.2	Solução da equação para o campo de velocidade axial . . . . .	55
5.2.1	Condição de contorno . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Interação entre modos na junção</b>	<b>62</b>
6.1	Formulação integral . . . . .	63
6.2	Sistema de coordenadas . . . . .	65
6.3	Interação entre modos de mesma frequência . . . . .	68
6.3.1	Comportamento de (6.36) com $p \gg 1$ . . . . .	73
6.3.2	Influência da velocidade . . . . .	76
6.3.3	Índice de vibração . . . . .	76
6.3.4	Influência da viscosidade . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>80</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>84</b>
<b>A</b>	<b>Vorticidade e energia</b>	<b>97</b>
<b>B</b>	<b>Conceitos de análise complexa</b>	<b>98</b>
B.0.5	Conceitos básicos . . . . .	98
<b>C</b>	<b>Demonstrações e deduções</b>	<b>103</b>
C.1	Dedução da equação (4.7) . . . . .	103
C.2	Demonstração da meromorficidade de (4.11) . . . . .	105
C.3	Dedução da equação (4.18) . . . . .	107

# Lista de Figuras

1.1	Principais atividades desenvolvidas. . . . .	3
1.2	Desenho esquemático de uma ramificação de duto cilíndrico. . . . .	4
3.1	Relação entre as partes imaginária e real de raízes de (3.38), para cada índice de raiz $n$ . . . . .	39
4.1	Contorno de integração. . . . .	51
6.1	Componente normal da flutuação de velocidade axial na junção. . . .	65
6.2	Geometria na ramificação. . . . .	66
6.3	Triângulos de coordenadas. . . . .	67
6.4	Valores de (6.37) para várias configurações de modos, $m = 0$ e $p \in$ $[0, 30]$ , com $(\alpha_z^* < \alpha_{Gpq})$ fixo e raio $R_s$ crescente. . . . .	75
6.5	Valores de (6.37) para várias configurações de modos, $m = 0$ e $p \in$ $[0, 30]$ , com $(\alpha_z^* > \alpha_{Gpq})$ fixo e e raio $R_s$ crescente. . . . .	75

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo do fenômeno acústico gerado aerodinamicamente foi iniciado por James Lighthill em 1952 [1, 2]. Neste trabalho inicial, estudou-se o som gerado pelo escoamento, caracterizado por uma distribuição de quadripolos, através de uma abordagem de campo livre, ou seja, os efeitos de reflexão, difração, absorção ou espalhamento por superfícies sólidas foram desconsiderados. Posteriormente, esta análise foi estendida por CURLE [3], com a incorporação das superfícies sólidas no campo acústico.

O mecanismo de interação entre o escoamento e o campo acústico é normalmente desconsiderado nas análises em campo livre [1], todavia em escoamentos internos ou confinados, a energia acústica pode acumular-se em modos de ressonância. As oscilações aeroacústicas decorrentes deste mecanismo ocasionam problemas severos de vibração e ruído em várias aplicações de engenharia [4–7]. Além disso, em escoamentos internos, grandes variações de pressão, causadas por válvulas e outros itens de tubulações, podem gerar energia acústica em alta frequência representando uma fonte indesejável de vibrações [8–11].

Existem diversos relatos de sistemas sujeitos ao fenômeno na indústria, incluindo plantas de energia, sistemas de transporte de gás, plantas de compressão e bombeamento, onde diferentes configurações geométricas são identificadas com o fenômeno, principalmente ramificações fechadas simples ou múltiplas [12, 13].

Em particular, sistemas de transporte de gás sofrem com o problema de ressonância acústica induzida por um escoamento de baixo número de Mach em dutos com ramificações fechadas, exigindo cuidadoso projeto de arranjo das tubulações destes sistemas [5].

Para as diversas etapas da indústria de processo, uma avaliação sobre as características de um sistema de tubulações é necessária, incluindo a possibilidade de prever a ocorrência de vibrações indesejadas, tanto na etapa inicial de operação da planta quanto na ocasião de mudanças nas condições de processo, como vazão e composição do fluido. Todavia, um método geral de previsão de pulsações de baixa

frequência em sistemas complexos de tubulação ainda não existe [14].

Falhas em tubulações da indústria de processo podem vir a ser catastróficas, com significativas perdas materiais e até mesmo humanas [15]. Além disso, o projeto das plantas de tubulação é realizado, frequentemente, negligenciando os efeitos do escoamento. Este fato, somado à utilização de espessuras de parede mais finas e elementos que atuam como concentradores de tensões, como uniões soldadas e ramificações, acarreta maior risco de fadiga, principalmente as de origem acústica em alta frequência [8, 16, 17].

As abordagens para o estudo da excitação acústica em dutos são baseadas na distinção entre baixas e altas frequências da onda sonora [18–21]. NISHIGUCHI *et al.* [9] sugerem, através de resultados experimentais, que, na presença de uma ramificação em um duto, os campos de alta e baixa frequência possam interagir. A interação sugerida pode ter causas não lineares, devido à flutuação de velocidade alcançar valores semelhantes à velocidade do som local na junção [9].

Com efeito, o acoplamento modal em ramificações foi objeto de estudos para geometrias retangulares [22, 23] e, mais raramente, circulares [24, 25]. Um ponto comum destes estudos é a desconsideração das altas frequências, do escoamento médio e da viscosidade do escoamento. A possibilidade de um modo de onda plana excitar modos superiores, em uma ramificação retangular, é também citada por REDMORE e MULHOLLAND [22], contudo sem considerações detalhadas e desconsiderando a possibilidade de efeitos não lineares.

Trabalho recente desenvolvido por DOKUMACI [26] mostra que os efeitos viscotérmicos são importantes nos modos acústicos axissimétricos do escoamento em um duto circular, com diferentes configurações de impedância acústica e escoamento médio uniforme. Além disso, os efeitos viscotérmicos são considerados tão importantes quanto o cisalhamento, dentro de uma camada cisalhante, no trabalho de KHAMIS e BRAMBLEY [27] e também na atenuação de uma onda plana incidente sobre uma superfície de impedância finita [28, 29].

Neste contexto, a investigação da possibilidade de acoplamento entre modos, principalmente ao considerar a situação de uma onda plana se deparando com uma ramificação do duto principal, é pouco estudada para geometrias cilíndricas e na presença de escoamento médio e viscosidade.

Este trabalho se propõe e tem como objetivo aumentar a compreensão sobre a possibilidade de acoplamento modal em ramificações cilíndricas, passando pela discussão dos efeitos da viscosidade no operador de onda e na distribuição modal na junção. A estratégia de investigação se baseia na inclusão da viscosidade e escoamento médio uniforme na obtenção de uma equação da onda. Posteriormente, tem-se a obtenção de uma função de Green para o operador e sua utilização em uma formulação integral em uma junção T de dutos infinitamente longos. A Figura 1.1

sumariza as principais etapas executadas ao longo do trabalho:

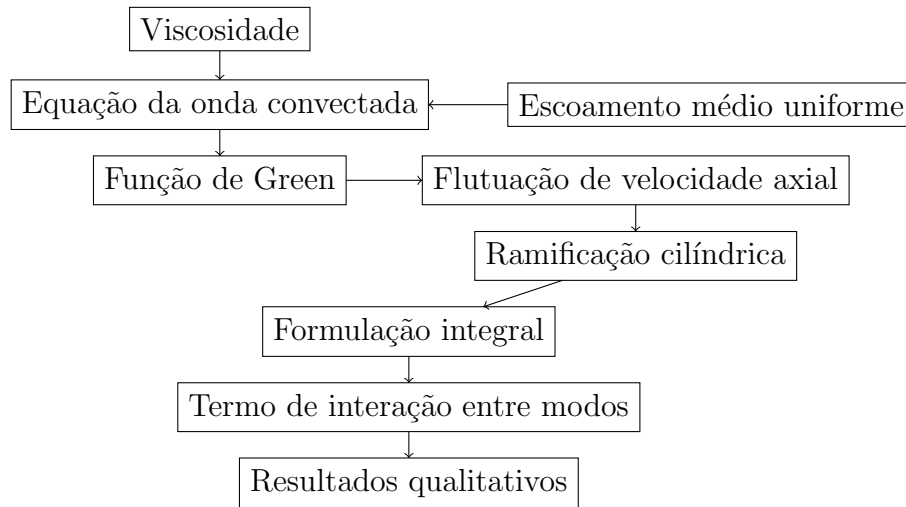


Figura 1.1: Principais atividades desenvolvidas.

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão geral do fenômeno aeroacústico, englobando as formulações desenvolvidas historicamente. A geração de ruído pelo escoamento é analisada através dos desenvolvimentos clássicos de analogia acústica de Lighthill [1, 2] e trabalhos de Powell, Howe, Möhring, Doak e Musafir [30, 31]. O papel da vorticidade como fonte acústica em escoamentos internos de baixo número de Mach é descrito baseado no trabalho de Hirschberg e Rienstra [18]. As características da geração e propagação de ruído em dutos são identificadas, dando ênfase à divisão por baixas e altas frequências. As diferentes nomenclaturas para o fenômeno de acoplamento de pulsações acústicas e modos estruturais em dutos são revistas e contextualizadas.

No Capítulo 3 é obtida uma equação da onda convectada, considerando escoamento médio constante e axial, viscosidades dinâmica e de expansão e variáveis médias constantes. É realizada a resolução, por expansão em modos, para a flutuação de pressão através de decomposição no Espaço de Fourier.

No Capítulo 4 uma função de Green é obtida para o operador de onda encontrado. Para avaliação dos termos das integrais obtidas, foi utilizada a teoria das funções de variáveis complexas, particularmente o Teorema dos Resíduos.

No Capítulo 5 são obtidas as equações diferenciais em coordenadas cilíndricas para a flutuação da velocidade, sendo resolvida a equação referente à componente axial. Alguns resultados assintóticos são utilizados para avaliação das integrais resultantes.

No Capítulo 6 a função de Green obtida e a componente axial da flutuação de velocidade são consideradas em uma formulação integral. Utilizando as relações de ortogonalidade das funções de Bessel de primeiro tipo, são obtidas simplificações para a expressão da velocidade. O campo acústico resultante de um modo de onda

plana é então considerado no resultado da integral de convolução, explicitando a possibilidade de acoplamento acústico para diferentes modos radiais da ramificação. Na Figura 1.2 é mostrado um desenho esquemático de uma ramificação e suas componentes.

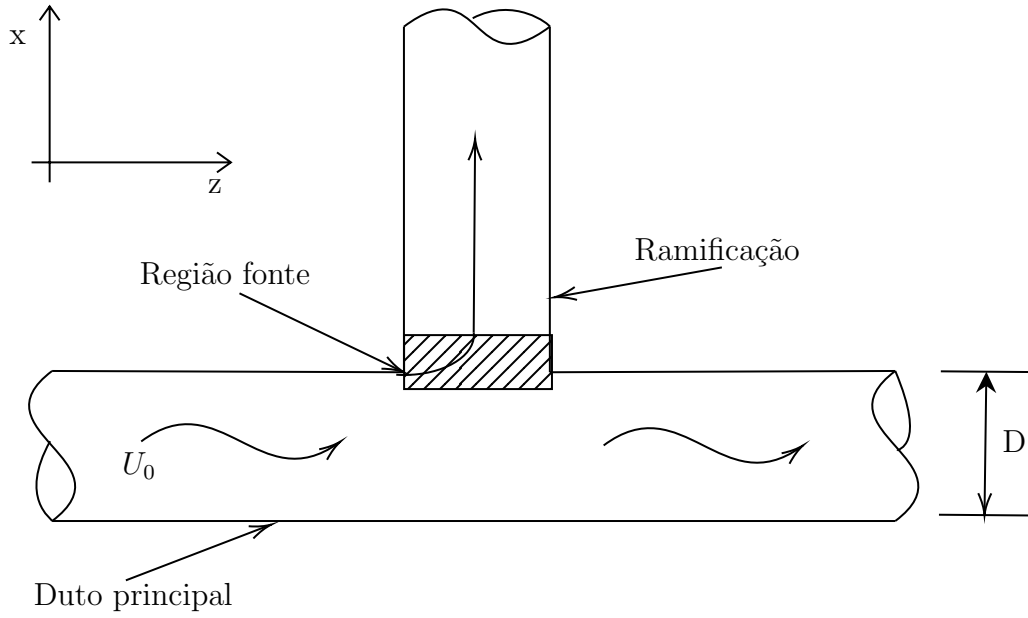


Figura 1.2: Desenho esquemático de uma ramificação de duto cilíndrico.

# Capítulo 2

## Geração e propagação do som em escoamentos

Este capítulo descreve alguns conceitos básicos utilizados e os aspectos gerais da aeroacústica, sendo revisada a teoria da geração aerodinâmica do som. São apresentadas as equações de conservação e a formulação através de funções de Green. A geração e propagação sonora em dutos é revisada, incluindo a descrição das diferentes abordagens para investigação dos fenômenos aeroacústicos e seus efeitos em tubulações, em especial ao considerar uma ramificação do duto principal.

### 2.1 Conceitos preliminares

Nesta seção são brevemente revisadas algumas técnicas e conceitos matemáticos utilizados ao longo do trabalho. Conceitos adicionais são também dados no Apêndice B, ao longo do texto e nas referências citadas.

#### 2.1.1 Equações de balanço

Uma descrição completa do escoamento de um fluido é dada, em cada tempo e posição, quando a velocidade e duas variáveis termodinâmicas são especificadas [32]. As equações necessárias para determinar o movimento em função das condições de contorno e de uma condição inicial são expressões dos princípios de conservação de momento, massa e energia, utilizados nas equações aeroacústicas e enunciados a seguir.

O princípio da conservação da quantidade de movimento linear, para uma formulação euleriana do escoamento de um fluido, é dado por [33]:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \rho \mathbf{f} \quad (2.1)$$



sendo  $\mathbb{T}$  o tensor tensão atuando em um volume material,  $\mathbf{f}$  uma força de corpo,  $\mathbf{u}$  o campo vetorial de velocidade,  $\rho$  a massa específica e  $D/Dt$  a derivada material, que mede a taxa de variação acompanhando o movimento de uma partícula fluida.

A equação do momento para um fluido viscoso é chamada de equação de Navier-Stokes e expressa a taxa de variação do momento de um partícula fluida em termos da pressão, forças viscosas e forças de corpo.

O princípio da conservação da massa estabelece que a taxa de incremento da massa de fluido, dentro de um volume, é igual ao balanço de massa que entra através das fronteiras do volume. A equação é descrita por [33]:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

para um fluido incompressível tem-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

O princípio de conservação da energia é descrito por [34]:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \mu_b \Delta^2 + 2\mu \mathbf{S} \otimes \mathbf{S} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (2.4)$$

sendo,  $s$  a entropia específica,  $\kappa$  a condutividade térmica,  $T$  a temperatura absoluta,  $\mathbf{S}$  o tensor taxa de deformação desviatório  $S_{ij} \equiv \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \Delta \delta_{ij} \right]$ ,  $\mu_b$  a viscosidade de expansão,  $\mu$  a viscosidade dinâmica e  $\Delta = \nabla \cdot \mathbf{u}$  [33].

### 2.1.2 Formulação por funções de Green

Problemas governados por equações diferenciais parciais lineares não homogêneas podem ser tratados ao considerarmos a resposta do sistema à uma perturbação impulsiva tanto no espaço quanto no tempo ([35], capítulo 2). Pode-se representar o problema como:

$$L_{(x,t)} \phi(\mathbf{x}, t) = Q(\mathbf{x}, t), \text{ para } \mathbf{x} \in \Omega_0 \quad (2.5)$$

sendo  $L_{(x,t)}$  um operador com coeficientes constantes,  $\phi$  o campo, e  $Q(\mathbf{x}, t)$  o campo fonte [35]. O domínio  $\Omega_0$  pode definir um espaço de dimensão arbitrária limitado por uma superfície  $S$ .

A equação para uma fonte impulsiva é dada por:

$$L_{(x,t)} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) \quad (2.6)$$

sendo  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , respectivamente, as posições do observador e da fonte,  $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)$  a função de Green e  $\delta$  a função delta de Dirac.

Pode-se utilizar a função de Heaviside [35]:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

e definir uma função  $g(x)$  tal que:

$$g(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se dentro de } \Omega_0, \\ < 0, & \text{se fora de } \Omega_0, \\ = 0, & \text{se em } S. \end{cases} \quad (2.8)$$

Multiplica-se a equação (2.5) por  $H(g)$  de tal modo que:

$$H(g) (L_{(x,t)} \phi(\mathbf{x}, t)) = Q(\mathbf{x}, t) H(g) \quad (2.9)$$

A partir de (2.9) é necessário passar  $H(g)$  para o operador  $L_{(x,t)}$ , este processo gera termos adicionais que podem ser considerados concentrados na superfície  $S$ . A equação (2.9) é representada então por:

$$L_{(x,t)} \phi(\mathbf{x}, t) H(g) = Q(\mathbf{y}, t) H(g) + \sum f(\phi(\mathbf{x}, t), \delta(g)) \quad (2.10)$$

sendo  $f(\phi(\mathbf{x}, t), \delta(g))$  os termos de superfície, dependentes da forma do operador diferencial.

Ao multiplicar a equação (2.10) por  $Q(\mathbf{y}, t)$  e integrar no tempo e no espaço em um volume  $\Omega_0$ , englobando tanto o volume quanto a superfície  $S$ , obtém-se [35]:

$$H(g) \phi(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega_0, t} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \left[ Q(\mathbf{y}, t) H(g) + \sum f(\phi(\mathbf{x}, t), \delta(g)) \right] d\mathbf{y}^3 d\tau \quad (2.11)$$

A equação (2.11) representa uma formulação integral para o problema. A função de Green deve satisfazer as condições de contorno inerentes à geometria estudada. Destaca-se que, dentro do volume  $\Omega_0$ ,  $H(g) \phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t)$ .

Dada a função de Green do operador, o campo para uma distribuição arbitrária de fontes pode ser encontrado através da convolução (2.11). O campo fonte pode ser determinado analiticamente ou pode ser obtido em uma abordagem numérica. A determinação experimental necessita de um modelo teórico que capture as carac-

terísticas do campo fonte, como avaliado no trabalho de BRUGGEMAN [36].

### 2.1.3 Convolução de funções e transformação de Fourier

A convolução de duas funções tem papel importante na teoria da análise de Fourier, sendo utilizada na obtenção de resultados ao longo da dissertação, junto com a função de Green.

Dadas duas funções integráveis e periódicas  $f$  e  $g$  em  $\mathbb{R}$ , a convolução  $f * g$  em  $[-\pi, \pi]$ , é dada por ([37], capítulo 2, equação 2):

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \quad (2.12)$$

Sendo as funções  $f$  e  $g$  periódicas, é possível mudar as variáveis em (2.12) e obter [37]:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \quad (2.13)$$

Deste modo, convoluções podem também ser consideradas como "médias ponderadas". Para ilustrar este ponto, basta fazer  $g = 1$  em (2.12) e interpretar  $f * g$  como o valor médio de  $f$  no círculo [37].

Com efeito, pode-se definir o espaço de Schwartz,  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , como aquele em que a função  $f$  e todas as suas derivadas são rapidamente decrescentes na forma:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty \quad \forall k, l > 0 \quad (2.14)$$

Se as funções  $f$  e  $g$  estão definidas em  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , a convolução entre elas pode ser estabelecida por [37]:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \quad (2.15)$$

Pode-se definir a transformação de Fourier, de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por [37]:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

e a transformada inversa de Fourier como:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

É possível mostrar que a soma parcial da representação de Fourier de uma função  $f$  pode ser decomposta da seguinte maneira ([37], capítulo 2):

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx} \\
&= \sum_{n=-N}^N \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy
\end{aligned} \tag{2.18}$$

A representação dada em (2.18) é bastante útil quando combinada ao limite  $N \rightarrow \infty$ , que resulta ([37], capítulo 2):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f \tag{2.19}$$

A relação em (2.19) pode então representar a função em suas componentes de Fourier como dado pela expressão (2.18). Este fato é comumente utilizado nas decomposições de Fourier em coordenadas cilíndricas da função de Green e da função delta de Dirac [38–40].

## 2.2 Aeroacústica

A teoria da geração do som foi objeto de estudo de Lorde Rayleigh em seu trabalho *Theory of Sound* (1877) [41], sendo a fonte sonora considerada como resultado das vibrações mecânicas de estruturas. RAYLEIGH [41] indica que a intensidade sonora decai rapidamente com a distância à fonte, todavia, há uma consideração explícita aos efeitos do confinamento do som na manutenção da sua intensidade.

O efeito do desenvolvimento da aeronáutica e suas turbinas a jato revelou um problema da estimativa da intensidade acústica que não era completamente descrita pelos conceitos até então estabelecidos. Estimulado por este fato, Sir James Lighthill [1, 2], desenvolve uma teoria acústica geral na qual identifica o escoamento instável como uma fonte acústica. Também argumenta que, em um escoamento livre, a retroalimentação entre o som produzido e o escoamento não é esperada, a não ser que um meio de acúmulo de energia acústica esteja presente, como um ressonador transferindo energia do campo acústico para o escoamento e do escoamento para o campo acústico [1]. Os resultados de Lighthill [1] se mostram bastante úteis, como definido no trabalho de TAO [42], sendo usados repetidamente em trabalhos posteriores.

O desenvolvimento de Lighthill [1] descreve o comportamento quadrupolar do som produzido por flutuações turbulentas do campo de velocidade, na ausência de superfícies interagindo com o escoamento. Em trabalho posterior, Lighthill [2] incorpora as propriedades estatísticas dos escoamentos turbulentos, caracterizados

pelo espectro amplo de frequências.

No desenvolvimento original de Lighthill [1] os efeitos de reflexão, absorção ou difração pela presença de fronteiras não são considerados. Todavia, foi possível estabelecer, através de equações de conservação sem hipóteses simplificadoras, uma analogia exata. Isto é, a equação de Lighthill permite interpretar a geração de ruído pelo escoamento, como devido ao efeito das tensões de Lighthill aplicadas a um meio de referência, homogêneo e em repouso. Esta equação é expressa por:

$$\frac{\partial^2 \rho'(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - c_*^2 \nabla^2 \rho'(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2.20)$$

sendo  $T_{ij} = \rho u_i u_j - \tau_{ij} + (p - c_*^2 \rho') \delta_{ij}$  o tensor tensão de Lighthill,  $\tau_{ij} = 2\mu S_{ij}$  o tensor de forças viscosas,  $p$  a pressão,  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker,  $u_i$  a componente de velocidade e  $c_*$  uma constante arbitrária que pode ser vista como a velocidade do som em um meio homogêneo e em repouso de referência. A velocidade do som é definida como  $c^2 \equiv \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)$ .

A solução da equação é obtida por Lighthill, para meio livre de fronteiras, como [1]:

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_*^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} T_{ij} \left( \mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c_*} \right) \frac{d\mathbf{y}^3}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \quad (2.21)$$

sendo  $\Omega$  o volume em que os termos fonte são importantes [43]. O tensor  $\rho u_i u_j$  tem parcelas lineares e não lineares nas flutuações e é importante apenas na região fonte [32]. Esta separação, em que a propagação é representada por uma equação da onda linear no lado esquerdo e as não linearidades são representadas como termos fonte, é precursora da abordagem de Lilley, que é analisada por Musafir [44].

A equação (2.20), chamada de analogia acústica de Lighthill, contém a incógnita  $\rho'$  no lado direito da equação, aparecendo nos termos fonte. Este problema é contornado com as hipóteses de que a densidade média e a velocidade do som são uniformes. Assim, obtém-se a aproximação  $T_{ij} \approx \rho_0 u_i u_j$ , conforme mostrado por Lighthill [1].

Com esta aproximação, a solução de (2.20) pode ser escrita como:

$$\rho'(\mathbf{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi c_*^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} \rho_0 u_i u_j \left( \mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c_*} \right) \frac{d\mathbf{y}^3}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \quad (2.22)$$

No campo afastado ( $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ), tem-se [1]:

$$\rho'(\mathbf{x}, t) \approx \frac{x_i x_j}{4\pi \|\mathbf{x}\|^3 c_*^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Omega} \rho_0 u_i u_j \left( \mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c_*} \right) d\mathbf{y}^3 \quad (2.23)$$

A formulação de Lighthill (2.20), permite a obtenção de estimativas para o campo acústico através de análise dimensional [1], sendo avaliada a potência acústica gerada por um jato turbulento livre  $\overline{\rho'^2} \approx \rho_0^2 M^8 \frac{D^2}{\|\mathbf{x}\|^2}$ , em que  $M$  é o número de Mach e  $D$  o diâmetro do bocal do jato [43].

LAYTON e NOVOTNÝ [45] estudam a derivação matematicamente rigorosa da analogia de Lighthill para o escoamento de um fluido viscoso, compressível em regime isoentrópico e de baixo número de Mach, sendo provados alguns resultados interessantes através de soluções em abordagem variacional [45]. Entre os resultados, há a indicação de construir a solução da equação de Lighthill (2.20) usando a solução das equações de Navier-Stokes incompressíveis em conjunto com a solução da equação da onda homogênea ([45], Teoremas 2.1 e 2.2).

A incorporação dos efeitos de fronteiras sólidas no campo acústico na equação (2.21) foi executada por CURLE [3]. Em seu trabalho, é mostrado que os efeitos de reflexão e difração das ondas sonoras nas fronteiras sólidas são equivalentes a uma distribuição de dipolos. Assim, fisicamente pode-se considerar o campo como resultado de uma distribuição volumétrica de quadripolos e uma distribuição superficial de dipolos [3].

A expressão obtida por Curle é exata, uma vez que nenhuma consideração simplificadora foi feita relacionando as tensões e as taxas de deformação [3]. Para o caso geral, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi c_*^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} T_{ij} \left( \mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c_*} \right) \frac{d\mathbf{y}^3}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \\ & + \frac{1}{4\pi c_*^2} \int_{\partial\Omega} l_i \frac{\partial}{\partial y_j} (\rho u_i u_j + p_{ij}) \frac{dS(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \\ & + \frac{1}{4\pi c_*^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\partial\Omega} l_j \frac{\partial}{\partial y_j} (\rho u_i u_j + p_{ij}) \frac{dS(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \quad (2.24) \end{aligned}$$

sendo  $P_i = -l_j p_{ij}$ ,  $p_{ij}$  o tensor tensão agindo no fluido,  $l_i$  os cossenos diretores do vetor  $\mathbf{n}$ , normal ao fluido e  $\partial\Omega$  o contorno sólido do volume  $\Omega$ .

Ao considerar que a velocidade normal no contorno sólido seja nula, isto é, se cada superfície está fixa ou vibrando em seu próprio plano,  $l_i u_i = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi c_*^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} T_{ij} \left( \mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c_*} \right) \frac{d\mathbf{y}^3}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \\ & - \frac{1}{4\pi c_*^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\partial\Omega} P_i \left( \mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c_*} \right) \frac{dS(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \quad (2.25) \end{aligned}$$

Prosseguindo nos desenvolvimentos de CURLE [3] e Lighthill [1, 2],

FFOWCS WILLIAMS e HAWKINGS [46] estenderam a teoria do som aerodinâmico incluindo o efeito de superfícies em movimento arbitrário. Na solução é obtida, através da utilização de funções generalizadas, uma formulação da equação da onda não homogênea para superfícies em movimento, expressa por [46]:

$$\frac{\partial^2 \rho'(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - c_*^2 \nabla^2 \rho'(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p_{ij} \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 u_i \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad (2.26)$$

sendo  $f = 0$  a superfície  $S$  e  $\delta$  a função delta de Dirac, a barra inferior indica que a variável é uma função generalizada válida em todo o volume  $\Omega$  [46]. A superfície  $S$  é considerada impermeável, isto é, a componente normal do vetor velocidade é contínua no contorno. Caso a superfície seja um corpo sólido estacionário, então  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  em  $S$  [33].

A solução da equação (2.26) é obtida como [46]:

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi c_*^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} \left[ \frac{T_{ij} J}{r \|1 - M_r\|} \right] d\eta \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{p_{ij} n_j A}{r \|1 - M_r\|} \right] dS(\eta) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\rho_0 u_n}{r \|1 - M_r\|} \right] dS(\eta) \end{aligned} \quad (2.27)$$

sendo  $\eta$  uma coordenada lagrangeana generalizada, para a qual cada elemento da distribuição de fontes está em repouso, dada por:

$$\mathbf{y} = \eta + \int^{\tau} \mathbf{cM}(\eta, \tau') d\tau' \quad (2.28)$$

sendo  $\mathbf{cM}$  a velocidade da superfície em movimento,  $\tau$  uma variável temporal e  $J$  o jacobiano, dado por:

$$J = \exp \left[ \int^{\tau} \nabla \cdot \mathbf{cM}(\eta, \tau') d\tau' \right] \quad (2.29)$$

Os integrandos em (2.27) são tomados no tempo retardado  $\tau = t - \frac{r}{c}$ , sendo que a distância  $r$  é dada por:

$$r = \|\mathbf{x} - \eta - \int^{\tau} \mathbf{cM}(\eta, \tau') d\tau'\| \quad (2.30)$$

Uma introdução às funções generalizadas é fornecida de maneira rigorosa por LIGHTHILL [47], sendo os conceitos de funções boas e francamente boas definidos de maneira engenhosa, constituindo-se em um excelente embasamento teórico. Uma

revisão mais aplicada do assunto também é dada por CRIGHTON *et al.* [35].

A maioria das aplicações da formulação de FFWCS WILLIAMS e HAWKINGS [46] é concernente aos escoamentos de alta velocidade envolvendo superfícies de controle em movimento rápido e distribuições de fontes [32].

Destaca-se que a teoria do som produzido aerodinamicamente pode ser dividida em distintas abordagens. A primeira, com aplicações tendo em vista o ruído de jato, é representada pelos trabalhos de PHILLIPS [48] e Lilley, como descrito por MUSAFIR [30, 44]. A segunda vertente é representada pela vorticidade como fonte acústica [32].

A formulação de PHILLIPS [48] foi proposta para descrição da geração do som por escoamentos turbulentos em altos números de Mach. O desenvolvimento parte da modificação da variável acústica na equação (2.20) considerando uma pressão logarítmica, resultando em uma equação da onda convectada para descrição da geração e propagação das perturbações de pressão. A expressão incluindo termos fontes é dada por [49]:

$$\frac{D^2\pi}{Dt^2} - \nabla \cdot (c^2 \nabla \pi) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{Dq^*}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{f}^* \quad (2.31)$$

sendo  $\pi = \gamma^{-1} \ln(\frac{p}{p_\infty})$ ,  $p_\infty$  uma constante,  $\gamma$  a razão de calores específicos e  $q^*$  e  $f^*$  fontes por unidade de massa nas equações da massa e momento, respectivamente.

Como explicitado por MUSAFIR [49], a equação (2.31) não representa uma analogia acústica, uma vez que a forma homogênea da equação não corresponde a uma situação que possa ser considerada de referência, enquanto o principal termo fonte não pode ser descrito como uma fonte equivalente.

A formulação de Lilley [44] define uma analogia acústica exata, em que a situação de referência é um escoamento paralelo e incompressível. O desenvolvimento parte da equação (2.31) arranjando os termos lineares e não lineares nas flutuações, em lados diferentes da equação, considerando que os termos não lineares representam geração enquanto os lineares a propagação. As variáveis são separadas em partes médias e flutuantes. A formulação de Lilley é representada por [49]:

$$\begin{aligned} \frac{D_0^3\pi}{Dt^3} - \left( \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot - 2 \nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) (c_0^2 \nabla \pi) &= \left( \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot - 2 \nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\ &\quad \left[ \nabla \cdot (\mathbf{u}' \mathbf{u}') + (c^2)' \nabla \pi' - \mathbf{u}' \nabla \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{f}^* \right] + \frac{D_0^2\pi}{Dt^2} (q^* - \mathbf{u}' \cdot \nabla \pi') \end{aligned} \quad (2.32)$$

sendo  $\mathbf{u}_0 = (U(x_2, x_3), 0, 0)$  solenoidal e  $\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_1}$  a derivada material acompanhando a velocidade média. A equação permite diferentes expressões para os



termos fonte, analisadas de modo detalhado por MUSAFIR [44].

Para a identificação do significado físico dos termos das equações, da sensibilidade em relação aos aspectos fundamentais dos operadores envolvidos e da validade de cada desenvolvimento, a abordagem explicitada por MUSAFIR [30] pode ser utilizada. Nesta abordagem, procura-se avaliar as operações realizadas na obtenção das equações, através da inclusão de fontes nas equações de balanço de massa e quantidade de movimento, fornecendo de modo claro as propriedades físicas de cada termo fonte [30].

GOLDSTEIN [50] mostra que as equações de balanço da quantidade de movimento linear podem ser reescritas como um conjunto de equações não homogêneas linearizadas, com os termos fonte equivalentes às tensões externas de cisalhamento e fluxo de energia. A abordagem é chamada de analogia acústica generalizada, pois as flutuações podem ser obtidas a partir de um escoamento arbitrário de referência, no qual a linearização é efetuada [49].

POWELL [51] argumenta que, no limite de baixo número de Mach, o principal termo de geração na analogia de Lighthill (2.20) é a vorticidade. Uma justificativa formal é dada por HOWE [52], no qual, partindo da forma de Crocco [33] da equação da quantidade de movimento linear, introduz a entalpia de estagnação como variável acústica.

A identificação dos componentes acústicos dos escoamentos é tratada de forma sistemática por JENVEY [53]. Na abordagem utilizada, os componentes do escoamento, fluxo de massa, velocidade, densidade, entalpia, energia interna e tensões viscosas, são divididos em acústicos, entrópicos e vorticais. Os componentes acústicos são definidos por sua associação com as flutuações de pressão. Como condição para análise, também estabelece a existência de uma equação de estado, com pressão e entropia como variáveis independentes, permitindo a separação das quantidades termodinâmicas em variações de pressão e entropia.

## 2.3 Vorticidade e ressonância em escoamentos internos

Oscilações aeroacústicas em camadas cisalhantes são causadas pela interação instável entre o campo acústico (potencial) e a fonte [54]. Em particular, quando a excitação se acopla a um campo acústico ressonante, podem ocorrer pulsações de elevada amplitude.

A instabilidade do escoamento cisalhante permite que, pela separação em áreas onde existam gradientes significativos nas propriedades geométricas ou de escoamento, ela atue como fonte retroalimentadora do campo acústico gerado interna-

mente [55]. Em escoamentos internos, o campo acústico pode ser alimentado por um fluxo de energia advinda da geração de vórtices. Sendo assim, em escoamentos internos ressonantes, onde há separação e descolamento do escoamento instável, a vorticidade tem um papel central. O processo se inicia com o crescimento de pequenas perturbações de vorticidade na camada cisalhante descolada. Conforme estas se deslocam através da expansão de área, há interação com o campo acústico e criação de um circuito de retroalimentação, que pode aumentar ou diminuir a resposta acústica do sistema de tubulações [56].

Um importante resultado é o desenvolvimento de uma teoria relacionando a potência emitida pelo escoamento a partir de uma distribuição de vorticidade por HOWE [31], que fornece os fundamentos para uma análise do balanço de energia em sistemas ressonantes. A formulação parte da forma de Crocco, usando a decomposição do campo vetorial de velocidades em uma parte solenoidal e outra potencial. A equação para a taxa na qual a energia acústica é produzida ou dissipada em um escoamento com geração de vorticidade, com massa específica média uniforme e em baixos números de Mach, é dada por [31]:

$$\overline{P} = -\rho_0 \int_{\Omega} \overline{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{sol}) \cdot \mathbf{u}_{pot}} d\Omega \quad (2.33)$$

sendo  $P$  a taxa de energia média transferida,  $\mathbf{u}_{sol}$  o campo de velocidade solenoidal induzido,  $\mathbf{u}_{pot} = \nabla\phi$  o campo de velocidade potencial e a barra superior indica média temporal. Tem-se que  $\mathbf{u}_{sol}$  é dado pela lei de Biot-Savart [31, 33] como:

$$\mathbf{u}_{sol}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}, t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y} \quad (2.34)$$

A equação (2.33), que para completude do texto tem sua dedução revista no Apêndice A, foi usada por HOWE [31] para obtenção de estimativas para potência sonora emitida por um bocal de jato com baixo número de Mach e número de Strouhal, com resultados em boa ordem de aproximação com os experimentais. A grandeza obtida foi um coeficiente de absorção, definido como a razão entre a potência sonora irradiada e a potência total. Destaca-se como vantagem a simplicidade da análise, uma vez que descrições detalhadas do escoamento não são necessárias [31].

A propagação de ondas sonoras em dutos tem uma forte dependência da frequência, sendo bem estabelecido que somente ondas planas se propagam quando a frequência de excitação é menor que um valor específico, característico da geometria do duto [18, 19, 57]. Deste modo, a maioria dos modelos do problema de ressonância em uma ramificação fechada utiliza a hipótese de baixa frequência, e, portanto, propagação de ondas planas.

## 2.4 Geração e propagação sonora em dutos

Em escoamentos com alto número de Reynolds, em que alguma descontinuidade geométrica ao longo de dutos fechados exista, pode ocorrer uma excitação de alta frequência e, portanto, a propagação de ondas acústicas em modos de ordem superior.

Os estudos de propagação em modos superiores se dividem entre aqueles que desconsideram a resposta mecânica do duto e aqueles que realizam uma análise acoplada. Ao desconsiderar a resposta mecânica do duto, estudam-se as características de propagação com relação à geometria e condições de contorno. Em uma análise acoplada, tem-se geralmente a construção de modelos baseados em simulações computacionais e fórmulas empíricas [18, 58].

Em um duto cilíndrico, pode-se definir um modo por [19]:

$$J_m(\alpha r)e^{-im\theta}e^{-ik_z z}e^{i\omega t} \quad (2.35)$$

sendo  $k_z$  o número de onda axial,  $\omega$  a frequência de excitação,  $m$  a ordem do modo e  $\alpha$  um autovalor.

Para a propagação axial a parte imaginária de  $k_z$  determina o decaimento do modo [19]. Modos tendo um número de onda axial puramente imaginário possuem um decaimento exponencial com a distância da fonte, sendo denominados evanescentes e a frequência a partir da qual se inicia este decaimento exponencial é chamada de frequência de corte. Os modos com a parte real não nula do número de onda axial são chamados propagantes. De fato, separando a parte real e imaginária de  $k_{zmn}$ , tem-se:

$$e^{-ik_z z} = e^{-i\text{Re}(k_{zmn})z}e^{\text{Im}(k_{zmn})z} \quad (2.36)$$

Para um modo se propagando no sentido positivo de  $z$  deve-se ter:

$$\begin{cases} \text{Re}(k_{zmn}) \geq 0 \\ \text{Im}(k_{zmn}) \leq 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

A velocidade de fase de uma onda é a velocidade na qual a fase  $\omega t - k_z z$  é constante, isto é [18]:

$$u_{fase} \equiv \frac{\omega}{k_z} \quad (2.38)$$

Qualquer onda pode ser considerada como parte de um pacote de ondas, com frequências e números de onda relacionados por uma relação de dispersão do tipo

$\omega = \omega(k_z)$ . Este conjunto de ondas se desloca com a velocidade de grupo, dada por [18]:

$$u_{grupo} \equiv \frac{d\omega}{dk_z} \quad (2.39)$$

### 2.4.1 Estudos sobre propagação sonora

PRIDMORE-BROWN [59] estuda a propagação de uma onda acústica bidimensional através de escoamento cisalhante com gradiente constante e também escoamento turbulento, acima de uma superfície plana. São desenvolvidas equações para a propagação sonora, em um escoamento invíscido, e os resultados são utilizados na estimativa da atenuação do som pelo efeito do escoamento em um duto com impedância finita. A condição de contorno utilizada é a continuidade da componente normal de velocidade, tanto na camada cisalhante quanto na parede. O trabalho de PRIDMORE-BROWN [59] é considerado pioneiro no tratamento de escoamentos com impedância finita e a equação recebe o nome em homenagem ao autor: Equação de Pridmore-Brown, cujo operador é dado por:

$$\mathcal{F}_{PB} \equiv \left( \frac{D_0^3}{Dt^3} - \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot - 2 \nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) (c_0^2 \nabla) \quad (2.40)$$

Destaca-se que este operador é o mesmo da formulação de Lilley, (2.32), ao desconsiderar os termos fonte. O operador em (2.40) é o mais geral para a propagação sonora em um escoamento isentrópico, invíscido e com pressão média uniforme.

A geração do som em dutos de parede rígida, com escoamento médio, é analisada por MORFEY [60]. Ondas estacionárias são avaliadas através da aplicação de condições de contorno com impedância finita nas terminações do duto. São dadas sugestões para a análise da geração sonora por fontes em uma descontinuidade do escoamento médio.

O operador linear utilizado por MORFEY [60] é, para um campo sem fontes, dado por:

$$\mathcal{F}_M \equiv \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \right)^2 - c_0^2 \nabla^2 \right] \quad (2.41)$$

sendo considerado um escoamento axial uniforme,  $\mathbf{U}_0 = (c_0 M_x, 0, 0)$ ,  $c_0$  e  $M_x$ , velocidade do som e número de Mach, constantes.

Para calcular a potência sonora transmitida pelo campo de pressão, MORFEY [60] define a intensidade acústica, para meios isentrópicos e irrotacionais como:

$$I_i = (\overline{p' u'_i}) + \frac{u_{i0}}{\rho_0 c_0^2} (\overline{p' p'}) + \frac{u_{i0} u_{j0}}{c_0^2} (\overline{p' u'_j}) + \rho_0 u_{j0} (\overline{u'_i u'_j}) \quad (2.42)$$

sendo a média temporal representada pela barra. A potência acústica total é encontrada ao integrar a intensidade axial ao longo de uma seção transversal do duto.

O campo acústico, para o caso do escoamento invíscido, em uma frequência específica, em um duto infinito, bidimensional e com seção transversal constante foi estudado por TESTER [61]. As paredes do duto foram analisadas nas situações de duto rígido e de impedância acústica finita. É interessante notar que a função de Green bidimensional, devido a uma fonte linear e infinita é derivada para um escoamento uniforme e com perfil parabólico, sendo representada como uma soma infinita de modos não ortogonais. Neste desenvolvimento não foi avaliada a convergência de uma decomposição crítica, isto é, não foi possível garantir a existência de soluções para um contorno de integração utilizado. Este fato foi parcialmente contornado ao comparar os resultados obtidos com a função de Green de campo livre.

Um espaço vetorial de dimensão finita, para ser corretamente representado, precisa de uma lista de vetores linearmente independentes que gere o espaço [62]. Pode-se argumentar que o espaço de solução dado por TESTER [61] não representa uma base para o problema de dimensão finita. Além disso, como todo espaço linear normado e completo, possui uma base ortonormal ([62], capítulo 2, Teorema 2.5), sugere-se que outras representações são possíveis para o espaço de soluções. Em um espaço de dimensão infinita, a existência de uma base é um problema extremamente não trivial, conforme pode ser verificado no trabalho de BLASS [63].

SWINBANKS [64] estuda o campo acústico gerado por uma distribuição de fontes em um duto com escoamento cisalhante, obtendo, quando a frequência da fonte é fixada, uma soma de modos não ortogonais. Como forma de conseguir uma solução com modos que satisfaçam uma relação de ortogonalidade, é obtido o resultado através de uma transformação de Fourier da solução. Os termos da expansão de Fourier obtidos contêm singularidades na forma de polos. A fórmula do resíduo é então aplicada para avaliação da amplitude dos modos.

DOAK [65] discute e revisa os aspectos práticos e teóricos da geração sonora por fontes distribuídas em escoamentos internos, considerando dutos com comprimento finito. A seção transversal do duto, a característica espaço-temporal da distribuição de fontes e as condições de contorno nas terminações são consideradas como os principais fatores influenciando o campo acústico, para dutos de parede rígida, sem escoamento.

DOAK [65] também desenvolve fórmulas para o campo acústico de um fonte pontual para um duto retangular de parede rígida, com terminações não refletoras e sem escoamento. Este trabalho foi pioneiro para a área de ar-condicionado e aquecimento. São estudados também os campos acústicos resultantes de monopolos, dipolos e quadripolos, para fontes apresentando uma única frequência, ou múltiplas

frequências e ainda com aleatoriedade temporal.

DOAK [65] define a potência acústica instantânea por unidade de área, na direção axial, como  $pv_z$  e a intensidade acústica média é dada por:

$$\bar{I}_z = \overline{pv_z} = \frac{1}{2} \text{Re}(pv_z^*) \quad (2.43)$$

sendo  $v_z$  o campo vetorial de velocidades na direção axial e  $*$  indica o conjugado complexo.

DOAK [65] considera a seguinte equação diferencial, para escoamento sem viscosidade, com velocidade média nula e uma fonte pontual, de dependência harmônica simples:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (Q_0 e^{i\omega t}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.44)$$

sendo  $Q_0$  uma amplitude complexa e  $\mathbf{x}_0$  a posição da fonte e  $p$  a pressão acústica.

DOAK [65] destaca que, no modelo considerado, a frequência de excitação tem influência na taxa de decaimento de um modo, isto é, no caso considerado se a frequência de excitação se aproxima da frequência de corte do modo, então este modo pode contribuir com transferência de energia por distâncias apreciáveis da fonte, cerca de alguns diâmetros interno do duto. Um dos interessantes resultados numéricos obtidos é um fenômeno de assimetria na propagação de energia pelos modos, isto é, modos de alta ordem transportando mais energia que o modo de onda plana.

Em trabalho posterior, DOAK [66] desenvolve métodos exatos para o cálculo dos campos acústicos para dutos de comprimento finito, paredes rígidas, terminações atenuadas, na ausência de escoamento, como resultado de uma distribuição interna de fontes acústicas.

Aspectos fundamentais da teoria do ruído em dutos são revistos e discutidos por DOAK [67]. É dado um enfoque maior nas relações entre o campo acústico irradiado por um duto e a distribuição de fontes equivalentes da analogia de Lighthill [1], explicitando os resultados através de análise dos multipolos.

MICHALKE [68] estuda a propagação do som em dutos circulares de parede rígida, com escoamento médio. Diferentes distribuições de fontes são consideradas nas soluções da equação obtida em domínio do tempo. No domínio da frequência é obtida a solução inclusive para a região fonte e o espectro de potência sonora é derivado.

SHEPHERD e CABELLI [69] utilizam um método de elementos finitos bidimensional para investigar as características de transmissão e reflexão dos modos acústicos

de alta ordem, no caso de uma curva em gomos a 90 graus, corroborando os resultados através de experimentos. O problema de um modo evanescente incidente na curva também foi estudado do ponto de vista da transferência de energia.

Uma solução analítica para a propagação sonora em dutos com impedância finita na parede, para um escoamento invíscido e em regime laminar é desenvolvida por GOGATE e MUNJAL [70] e os resultados são também comparados com o caso de um escoamento uniforme.

RIENSTRA e TESTER [39] derivam uma função de Green analítica para um duto circular, contendo escoamento uniforme, através de transformação de Fourier. As condições de contorno consideradas incluem parede rígida e também parede com impedância acústica finita. Uma investigação numérica das amplitudes modais também é executada, através de algoritmos específicos. O operador de onda convectado estudado é o mesmo obtido por MORFEY [60], (2.41), e GOLDSTEIN [71], da forma:

$$\mathcal{F}_{RT} \equiv \left( \frac{1}{c_0^2} \frac{D_0^2}{Dt^2} - \nabla^2 \right) \quad (2.45)$$

KINSLER *et al.* [72] incluem a viscosidade de expansão e dinâmica em um operador de onda ao estudar os efeitos de dissipação em um meio em repouso. O efeito individual da viscosidade é avaliado na dissipação de uma onda plana, sendo posteriormente adicionados os efeitos de dissipação térmica e moleculares. O operador estudado por KINSLER *et al.* [72] é dado por:

$$\mathcal{F}_K \equiv \left( \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - \tau_s \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \right) \quad (2.46)$$

sendo  $\tau_s$  um coeficiente viscoso com unidade de tempo.

BRAMBLEY [21] considera perturbações lineares no escoamento de um gás perfeito, compressível e invíscido ao longo de um duto cilíndrico. Os efeitos das condições de contorno no comportamento dos modos são discutidos. Estudos numéricos são realizados em uma curva de duto e também em uma mudança abrupta da condição de contorno através do Método de Wiener-Hopf. O operador utilizado é igual ao dado por GOLDSTEIN [71] e MORFEY [60], (2.45).

DOKUMACI [26, 73] estuda a flutuação da temperatura como variável acústica, considerando efeitos viscosos e térmicos, com escoamento uniforme e impedância finita na parede em um duto de seção circular. O operador isentrópico obtido é dado por:

$$\mathcal{F}_D \equiv \left( \frac{D_0}{Dt} - \frac{\kappa}{\rho_0 c_{p0}} \nabla^2 \right) \left( \frac{1}{c_0^2} \frac{D_0^2}{Dt^2} - \nabla^2 - \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left( \frac{4\mu}{3} \right) \frac{D_0}{Dt} \nabla^2 \right) \quad (2.47)$$

sendo  $c_{p0}$  o calor específico a pressão constante.

DOKUMACI [26] considera a decomposição do campo de velocidades em uma parte solenoidal e outra irrotacional, sendo obtidas expressões separadas para cada componente através de uma relação de dispersão para a condição de contorno que relaciona argumentos das componentes de velocidade, diferente da definição usada por RIENSTRA [19] e BRAMBLEY [21], a qual relaciona o número de onda axial e parte do argumento da solução, identificado como autovalor.

KHAMIS e BRAMBLEY [28] estudam a atenuação de uma onda plana incidente em uma superfície, considerando o escoamento cisalhante de um fluido viscoso, através de simulações numéricas e expansões assintóticas. Mostra-se que a condição de contorno de MYERS [74] prevê incorretamente a atenuação sonora em muitos casos, sendo estabelecido também que os efeitos de um escoamento viscoso são comparáveis aos efeitos de um escoamento cisalhante no caso estudado.

RIENSTRA [19] estabelece uma extensa e recente revisão da acústica de dutos, incluindo o desenvolvimento da equação de PRIDMORE-BROWN [59] e nos casos da propagação sonora em meios estacionários e também em movimento uniforme. São obtidas as expressões para as componentes de velocidade axial e flutuação de pressão. As relações de dispersão são também obtidas para cada caso, bem como expressões para as intensidades acústicas nos dutos de seção circular. Um exemplo de acoplamento de modos acústicos, em dutos circulares concêntricos, é explicitado através de formalismo matricial.

MATTHEWS [40] utiliza funções de Green na obtenção da resposta acústica gerada pelo escoamento em dutos de motores aeronáuticos com expansões assintóticas em alta frequência. Uma abordagem semelhante também é utilizada por POSSON e PEAKE [75] para a investigação dos efeitos do escoamento não axissimétrico em um duto anular.

#### **2.4.2 Efeito das discontinuidades geométricas na propagação**

O efeito de uma discontinuidade plana, caracterizada por uma mudança abrupta de seção transversal ou um diafragma plano de espessura reduzida, na propagação de uma onda plana, considerando modos de alta ordem excitados na discontinuidade, é analisado, para escoamentos invíscidos e bidimensionais, em dutos retangulares por MILES [76]. É estudado o efeito dos modos de ordem superior através de analogias com circuitos elétricos, sendo este efeito representado por uma capacitância discreta. Um duto circular também é tratado no problema através de aproximações para a reflexão acústica devido à mudança na seção transversal, constituindo-se em trabalho



pioneiro sobre o tema.

A teoria desenvolvida por MILES [76] é aplicada para tubos retangulares e circulares. Coeficientes de reflexão e transmissão são determinados através do circuito elétrico equivalente. Trabalhos experimentais são também realizados para determinação das impedâncias equivalentes [77]

REDMORE e MULHOLLAND [22] estudam o acoplamento entre modos do duto principal e da ramificação para dutos retangulares. Condições de contorno de impedância acústica também são consideradas nas paredes do duto. Os resultados são comparados com experimentos, todavia não são apresentados coeficientes de reflexão e transmissão. A propagação em dutos retangulares, através de curvas de 180 graus, foi analisada também por CUMMINGS [78].

Uma investigação experimental do escoamento tangencial em um ressonador de Helmholtz é realizada por NELSON *et al.* [79]. O comportamento físico da interação entre os termos fonte e a geração ou absorção de energia acústica é caracterizado através da medição das componentes médias e flutuantes dos campos de velocidade e de pressão.

O desenvolvimento experimental de NELSON *et al.* [79] serve de fundamentação para, em artigo posterior [80], identificar os balanços de energia e momento ocorrendo no escoamento nas condições de ressonância. O balanço de energia é identificado com as pressões e velocidades induzidas pela distribuição de vorticidades. O balanço de momento é associado ao escoamento potencial. Faz-se uso da superposição de dois campos vetoriais de velocidade na descrição do escoamento, um puramente vortical e solenoidal, induzido pela vorticidade, e outro potencial. A parte flutuante do campo de velocidade potencial é associada à ressonância acústica. Esta decomposição é a mesma utilizada por HOWE [31].

O problema do escoamento ao longo de uma ramificação fechada cilíndrica, foi estudado por JUNGOWSKI *et al.* [81] através de experimentos com ar e gás natural. Os efeitos de parâmetros da geometria da ramificação, do escoamento e das condições de contorno acústicas foram discutidos. Foram estudadas as ramificações classificadas como cavidades profundas, nas quais o comprimento é maior que o diâmetro. Uma conclusão importante é que o campo acústico criado na ramificação fechada depende da frequência de ressonância do sistema de tubulações como um todo, podendo desviar da frequência de ressonância de uma tubo fechado aberto em uma extremidade e fechado com contorno rígido na outra [81].

Dentre as análises realizadas por JUNGOWSKI *et al.* [81], destaca-se que o aumento do comprimento das ramificações resultou na supressão dos harmônicos e translação para as baixas frequências, reduzindo as oscilações. Tal fato, se considerado como medida preventiva às pulsações na indústria, pode induzir ressonância mecânica no sistema de tubulações. Isso ocorre, pois ao diminuir as frequências de

ressonância da ramificação fechada simples, através do aumento do comprimento, elas podem ficar da mesma ordem das frequências naturais mecânicas da tubulação, tipicamente entre 4 e 5 Hz [82].

JUNGOWSKI *et al.* [81] também analisam um modelo equivalente para a fonte, representada por um pistão oscilatório equivalente e duas matrizes de transferência com parâmetros empíricos. O balanço de energia também é avaliado, identificando dois diferentes modos de oscilação e seus respectivos números de Strouhal de ressonância  $St_m$ , entre 0,2 e 0,55 para o primeiro modo e entre  $\approx 0,4$  e  $\approx 1,1$  para o segundo modo. O número de Strouhal é definido como uma razão de frequências característica para o problema  $St_m = \frac{f_m d}{U_\infty}$ , sendo  $f_m$  uma frequência,  $d$  um comprimento característico, e  $U_\infty$  um escoamento de referência incidente. Uma fórmula empírica, com o Teorema II, para o número de Strouhal  $St_m$  de ressonância é obtida relacionando o diâmetro  $d$  da ramificação fechada, o número de Reynolds  $Re$  e o número de Mach  $M$ , além do raio de curvatura do contorno sólido  $r$  [81].

BRUGGEMAN [5] relata o problema de ressonância acústica de baixa frequência em um sistema de tubulações de uma estação de compressão caracterizada por várias ramificações fechadas em sequência. Neste caso, o nível de pulsação medido chegou ao valor de 8 vezes a pressão dinâmica do duto principal. Observou-se também um valor mínimo do número de Strouhal em ressonância menor que o relatado anteriormente na literatura.

A importância da caracterização das fontes aeroacústicas é enfatizada [5], uma vez que resultados anteriores as negligenciavam. Todavia, as vibrações estruturais são desconsideradas e o modelo não linear das fontes baseado na vorticidade, como proposto por HOWE [52], é utilizado como referência. Para a propagação de ondas acústicas de baixa frequência em dutos com curva e juntas T, é empregado o Método das Expansões Assintóticas Combinadas, dando uma aproximação de primeira ordem da solução quando a região fonte é acusticamente compacta. Uma região é dita acusticamente compacta se sua dimensão característica for pequena comparada com os comprimentos de onda que ela produz ou interage [83].

Ainda no modelo usado por BRUGGEMAN [5] o perfil de velocidade utilizado é uniforme e os efeitos da atenuação devido à viscosidade e condução de calor são pequenos. Os efeitos de dissipação podem ser incorporados ao número de onda como uma correção imaginária. Uma função de Green é usada em uma formulação integral do problema e o método de van der Pol é usado na solução da equação integral.

BRUGGEMAN *et al.* [84] desenvolvem um modelo teórico para as fontes aeroacústicas em ramificações fechadas. Experimentos são conduzidos avaliando os efeitos da dissipação e da geometria nos níveis de pulsação. Em particular, a mudança na forma da junção, canto vivo ou arredondado, resultou na modificação da amplitude de pulsação de maneira significativa, sendo reduzida pela adoção do

canto vivo na região de separação. Tal fato motivou o desenvolvimento de dispositivos para mudar artificialmente a geometria da junção como forma de controle passivo das pulsações. Também são definidos os conceitos de níveis de amplitudes das pulsações:

- $\frac{p'}{\rho c U_0} < 10^{-3}$ : pulsações de baixa amplitude, em que a teoria linear das perturbações da camada cisalhante ainda são válidas;
- $10^{-3} < \frac{p'}{\rho c U_0} < 10^{-1}$ : pulsações de amplitude moderada; em que os efeitos não lineares induzem uma concentração de vorticidade em estruturas coerentes e com a intensidade da fonte independente da amplitude do campo acústico;
- $\frac{p'}{\rho c U_0} \geq 10^{-1}$ : pulsações de elevada amplitude, em que o desprendimento de vórtices e o próprio percurso dos vórtices é influenciado de maneira particularmente forte pelo campo acústico.

A identificação da intensidade das fontes aeroacústicas, na condição de alta amplitude das pulsações, isto é, quando a componente acústica do campo de velocidade é da mesma ordem de grandeza do escoamento principal, é discutida por PETERS [7]. As geometrias consideradas foram as ramificações fechadas em oposição, formato cruz, e duas ramificações fechadas simples em sequência. Os diâmetros das ramificações são iguais ao do duto principal, enquanto os efeitos da atenuação do campo acústico pelas vibrações de parede da tubulação são desprezados. Observam-se dificuldades na simulação numérica das pulsações periódicas através dos métodos de vórtices simples, duplo e painel. A causa principal é a necessidade de aniquilação da vorticidade após um número de ciclos, a partir da geração, de modo a limitar o tempo e a região de integração numérica. Um outro aspecto observado é a transferência de energia entre modos, isto é, em altas amplitudes de pulsação efeitos não lineares no sistema causam atenuação do modo fundamental de pulsação, levando inclusive ao aparecimento de ondas de choque na junção cruzada.

KRIESELS *et al.* [13] avaliam o escoamento com alto número de Reynolds e baixo número de Mach em sistemas de tubulação com ramificações fechadas. A configuração de ramificações fechadas em posições opostas é analisada através de simulações computacionais da geração dos vórtices. Conclui-se que perdas pela emissão acústica devido à geração de harmônicos não ressonantes é significativa para o balanço de energia no problema de altas amplitudes de pulsações. Verifica-se também que, como as geometrias circular e quadrada não apresentaram grandes diferenças, um modelo bidimensional para a região fonte é suficiente para obter informações das principais características da fonte aeroacústica [13]. As ondas de

choque observadas por PETERS [7] também foram observadas por KRIESELS *et al.* [13] quando o nível de amplitude das pulsações alcançou  $\frac{p'}{\rho c U_0} \approx 1, 3$ .

De acordo com ZIADA e SHINE [12] um método para o projeto de sistemas de tubulação, composto por ramificações fechadas simples, em sequência ou em cruz, deve passar primeiro pela avaliação da velocidade do escoamento do duto principal, reduzindo a velocidade abaixo do valor crítico estabelecido em seu diagrama de projeto. Caso não seja possível, pode-se aumentar o diâmetro da ramificação, aumentando o número de Strouhal crítico e a velocidade crítica ou reduzindo o comprimento da ramificação fechada, reduzindo a frequência natural acústica no modelo de ondas planas. Se nenhuma modificação geométrica ou operacional puder ser realizada, ZIADA e SHINE [12] recomendam a estimativa das amplitudes das pulsações, conforme [5, 7, 85] para avaliar se medidas mitigadoras devam ser tomadas.

A caracterização do comportamento aeroacústico de junções T é realizada por FÖLLER *et al.* [86] através da Simulação de Grandes Escalas (LES) e identificação de sistemas. Além disso é utilizado o método de separação dos componentes do sistema de tubulações em elementos acústicos discretos, representados matematicamente por uma matriz de transferência. Utilizando as equações linearizadas de Navier-Stokes, HOLMBERG *et al.* [87] analisam a inclusão de amortecimento da energia acústica em regiões de elevada turbulência para uma junção T, no domínio da frequência.

A identificação de fontes aeroacústicas em um junção T é avaliada por SALT *et al.* [88] através de experimentos, caracterizando o campo de velocidade do escoamento durante um ciclo acústico das pulsações em ressonância, e pelo método dos elementos finitos, caracterizando o modo acústico excitado e seu campo de velocidade. A equação (2.33) é usada na caracterização da potência acústica instantânea.

A propagação em dutos retangulares e o acoplamento entre modos de ordem superior para várias discontinuidades, são analisados por MUEHLEISEN [23], através da obtenção de coeficientes de reflexão e transmissão. O duto é considerado de parede rígida e o escoamento é invíscido e sem escoamento médio. As expressões analíticas para os coeficientes de reflexão e transmissão são derivados com auxílio de uma função de Green para a região da junção.

MUEHLEISEN [23] destaca que, para a convergência de resultado em estudos numéricos da propagação em discontinuidades, a conservação de uma energia finita no contorno do problema implica em uma razão de modos para regiões de geometria similar. Deste modo, o número de modos em cada trecho do domínio deve ser proporcional à razão de comprimentos característicos para que haja convergência relativa. Esta razão na quantidade de modos evita que o resultado numérico convirga para valores diferentes de acordo com a quantidade de modos truncados.

Decomposição modal é utilizada por DUBOS *et al.* [25] para obter resultados

para a propagação sonora em uma ramificação em duto retangular. Considera-se que apenas o modo de onda plana se propaga, os outros modos sendo considerados evanescentes. Para a geometria circular, aproximações assintóticas foram obtidas, revisando e expandindo o trabalho de KEEFE [24], indicando também que a geometria circular não é totalmente adequada para decomposição modal. Esta conclusão se deve à forma da superfície de junção ser não circular, exigindo métodos numéricos na resolução das integrais resultantes.

TANG e LAM [89] investigam a transmissão do som, de uma ramificação inclinada em um duto retangular infinitamente longo, através do método de elementos finitos. Indica-se que a hipótese de propagação de ondas planas é válida somente em frequências muito baixas. Além disso, é observado que as intensidades dos modos de ordem superior são maiores que o modo de onda plana e que o ângulo de inclinação altera substancialmente a distribuição de energia entre os modos acústicos no duto.

LAU e LEUNG [90] realizaram estudos numéricos e experimentais para caracterizar as propriedades de transmissão sonora, em modos de ordem superior, em uma junção T e em uma ramificação fechada, com geometria retangular. Acoplamento modal, entre modos da ramificação e do duto principal, é observado nas duas abordagens. O acoplamento é atribuído ao descasamento entre o campo de velocidade e modos da ramificação na região da junção.

GRAF e PAN [91] desenvolvem um método numérico para determinação da matriz de espalhamento dos modos de ordem superior, considerando uma curva de ângulo reto e de seção retangular. Os resultados do método de elementos finitos empregado revelaram um acoplamento e interferência entre modos significativo.

## 2.5 Relação entre modos acústicos de ordem superior e a vibração da tubulação

Quando os modos acústicos de alta ordem se propagam em um duto, podem excitar mecanicamente a tubulação se as frequências acústica e mecânica forem coincidentes. Esta excitação depende da impedância acústica na condição de contorno entre o fluido e a tubulação.

CARUCCI e MUELLER [8] analisaram as causas da geração de altos níveis de energia acústica, formas de excitação da vibração da tubulação e o mecanismo de falha por fadiga, utilizando correlações com parâmetros empíricos para desenvolver uma curva de projeto da tubulação como função do nível de pressão sonora e diâmetro da tubulação. Sugestões de medidas mitigadoras são também consideradas.

A principal causa abordada por CARUCCI e MUELLER [8] foi a turbulência

gerada na passagem do escoamento por itens que apresentam gradientes de pressão significativos, redutores de pressão, como válvulas de controle e orifícios de restrição, dentro de uma tubulação de gás. Como o escoamento turbulento tem características aleatórias [92], o campo acústico gerado é considerado não periódico.

As vibrações induzidas acusticamente, e a investigação de seus efeitos, podem ser divididas em três aspectos [8]. Inicialmente, busca-se analisar e compreender a fonte de excitação. Em seguida, determinar a resposta dinâmica do sistema de tubulações. Por fim, investigar as consequências e potenciais medidas mitigadoras necessárias.

CARUCCI e MUELLER [8] notam que as vibrações de trechos pequenos de tubulação ou detalhes, com pequena dimensão e diâmetro, como válvulas de drenagem e as vibrações axiais e circunferenciais da tubulação são consideradas mais críticas em um sistema de tubulações, inclusive com relatos de experiências de falha.

Os pequenos detalhes não axissimétricos da tubulação, ao introduzirem discontinuidades, são concentradores de tensões nos quais os ciclos de tensões induzidas acusticamente são causa de falhas por fadiga [8].

As consequências da excitação de alta frequência foram relatadas como causa de fadiga em tubulações com ramificações fechadas e discontinuidades assimétricas por EVANS [93] e EISINGER [10]. Neste problema, as vibrações da parede do duto são responsáveis pela concentração de tensões nas discontinuidades geométricas da tubulação e consequente falha por fadiga [93].

A falta de uma metodologia amplamente aceita para representação da fonte de pressão em tubulações, a ser utilizada na previsão realista de ciclos de fadiga, causados pela propagação de ondas acústicas de modos de ordem superior, em acoplamento aos modos mecânicos de ordem superior da tubulação, é salientada por GHOSH *et al.* [94] que utilizam as frequências acústicas e mecânicas de um duto com ramificação lateral para prever o comportamento do sistema em relação à excitação distribuída ou não, desconsiderando hipóteses para a compacidade da região fonte acústica. As dificuldades também se devem às características aleatórias do escoamento turbulento [95–97], implicando que métodos estatísticos devem ser usados na descrição do espectro do campo acústico, conforme trabalho de PROUDMAN [92].

É corrente o uso de duas nomenclaturas distintas relacionando o acoplamento de vibrações entre fluido e estrutura, dividindo-as entre induzidos pelo escoamento (VIE) e os induzidos acusticamente (VIA) [9, 58, 98]. Tal separação é arbitrária em escoamentos internos, sendo as vibrações classificadas como induzidas pelo escoamento causadas, na verdade, pelas oscilações aeroacústicas iniciadas pelo escoamento cisalhante em alguma discontinuidade do domínio, geralmente de baixa frequência, enquanto as denominadas induzidas acusticamente são devido à propagação das ondas acústicas em modos de ordem superior e, geralmente, de alta frequência.

A vibração da estrutura do duto induzida acusticamente, VIA, é gerada quando um modo acústico circunferencial excita um modo circunferencial estrutural [94]. Geralmente, são causadas pela passagem através de itens da tubulação que causam redução acentuada da pressão, como válvulas e orifícios de restrição e podem causar falha catastrófica por fadiga do sistema de tubulações em pouco tempo conforme relatado por ROMANO *et al.* [99].

NISHIGUCHI *et al.* [9] investigam oscilações aeroacústicas devido ao escoamento em uma junção T a 90 graus através de dados experimentais. Um índice de vibração é desenvolvido para avaliar o nível de vibração na junção, apresentando resultados favoráveis para investigação dos níveis de vibração causados pelo escoamento. A aplicação do índice de vibração aos casos de falha reportados por CARUCCI e MUELLER [8], desenvolvidos para vibrações de alta frequência, induz os autores a sugerirem que, na junção, vibrações de alta e baixa frequência podem estar relacionadas.

O desenvolvimento de CARUCCI e MUELLER [8] foi utilizado para criar uma metodologia de avaliação de risco da ocorrência de falhas por fadiga em tubulações pelo *Energy Institute* [100]. O guia estabelece uma abordagem proativa, focada na análise de novos projetos, avaliação de mudanças em instalações existentes e identificação de problemas potenciais em sistema em operação. Dentro de uma abordagem integrada, a avaliação proposta é baseada nas seguintes etapas [100]:

- Identificação dos mecanismos de excitação;
- Avaliação ordenada de trechos do sistema com maior potencial de existência dos mecanismos de excitação;
- Avaliação quantitativa dos locais anteriores para determinar a probabilidade de geração de altos níveis de excitação acústica;
- Análise detalhada através de inspeções e medições em campo;
- Medidas corretivas para reduzir a probabilidade de falha por fadiga causada pela excitação acústica no sistema.

É interessante notar que há uma clara separação entre efeitos de baixa frequência e alta frequência na descrição dos mecanismos de excitação apresentados [100], embora NISHIGUCHI *et al.* [9] levantem a possibilidade de influência de acoplamento entre modos de alta e baixa frequência. Destaca-se também que no artigo pioneiro de CARUCCI e MUELLER [8], nos casos de falha descritos, a velocidade tangencial elevada na junção das descontinuidades do duto foi apontada como possível contribuinte.

HARPER [20] revisa os principais aspectos relacionados à vibração de baixa frequência (VIE) e alta frequência (VIA), através de estudos de casos em uma planta de gás. São investigadas as vibrações em dutos principais e também em ramificações de pequeno diâmetro. Destaca-se também a importância de abordagens iniciais preventivas ao lidar com as vibrações de origem acústica.

A partir de uma abordagem estrutural, IZUCHI *et al.* [11], propõem um procedimento para calcular a previsão de vida em fadiga da tubulação submetida à excitação acústica de alta frequência, considerando dados reais das condições de operação.

ALLISON e BENNETT [101] comparam modelos acústicos e estruturais com elementos finitos de forma a determinar modos coincidentes axiais e circunferenciais em conjunto com experimentos em diferentes geometrias. Medidas mitigadoras dos efeitos das vibrações são também avaliadas através de experimentos. Destaca-se que, embora estudem principalmente vibrações de alta frequência, os resultados experimentais indicam a excitação de modos de ordem inferior pelo escoamento turbulento, sugerindo o acoplamento entre modos.

KATAOKA e HIDA [102] discutem a vibração de cascas cilíndricas sujeitas à excitação acústica. Resultados numéricos são apresentados a partir de fórmulas teóricas para várias geometrias. São obtidos os principais fatores que afetam as tensões de vibração de casca, incluindo a resposta à excitação aleatória. Em trabalho posterior, KATAOKA [103] investiga os mecanismos de falhas por fadiga em ramificações de tubulações sujeitas à vibração induzida acusticamente. A concentração de tensões é discutida e os modos de vibração são avaliados para diferentes configurações de ramificações.

Verifica-se que a relação entre modos de alta frequência e baixa frequência, numa junção T ou ramificação fechada, considerando a possível excitação de modos superiores por modos de onda plana, não é bem estabelecida. Pode-se simplificar o problema ao restringir a análise para a possibilidade de interação entre modos em uma mesma frequência de excitação [104]. Assim, um estudo da interação entre modos, na descontinuidade geométrica, pode aumentar a compreensão sobre a questão levantada por NISHIGUCHI *et al.* [9].



# Capítulo 3

## Uma equação de onda convectada

### 3.1 Introdução

Para investigar a possibilidade de interação entre modos de onda plana com modos de ordem superior, na presença de uma descontinuidade geométrica no duto, obtém-se uma equação da onda convectada, considerando escoamento médio uniforme e subsônico, além de viscosidade dinâmica e de expansão. A expressão para a flutuação de pressão é resolvida no caso homogêneo, com expansão em modos de Fourier.

Considera-se que a camada limite, onde o cisalhamento é importante para números suficientemente altos de Reynolds, seja suficientemente pequena para ser desconsiderada. Perturbações acústicas são geralmente definidas como lineares e isentrópicas e a inclusão dos termos viscosos, sem a consideração dos termos térmicos, válida ao assumir que os dutos tenham raio interno suficientemente pequeno para que os efeitos térmicos possam ser negligenciados, como explicitado por DOKUMACI [26].

A equação obtida estende a equação dada, para meio homogêneo e em repouso, por KINSLER *et al.* [72] através da incorporação de escoamento médio não nulo. Também estende as formulações utilizadas por RIENSTRA e TESTER [39] e BRAMBLEY [21] ao considerar a viscosidade e confirma a forma do operador encontrada para escoamento isentrópico recentemente explicitada por DOKUMACI [26].

### 3.2 Equação da onda convectada

Nesta parte, através da combinação das equações de balanço, obtém-se uma equação da onda convectada, que considera os efeitos de um escoamento médio uniforme, na qual os efeitos de viscosidade dinâmica e de expansão são incluídos.

Os termos das equações de conservação da quantidade de movimento linear (2.1)

sem fontes, e da conservação da massa (2.2) são avaliados considerando a hipótese de pequenas perturbações e linearizados. A decomposição de Reynolds é utilizada, na qual cada variável acústica é decomposta em termos médios e de flutuação com média nula, obtendo-se:

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}', \quad p = p_0 + p' \quad (3.1)$$

A hipótese de escoamento isoentrópico leva:

$$\frac{Dp}{Dt} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{D\rho}{Dt} \quad (3.2)$$

Ao linearizar a equação de conservação da massa e considerar que  $p' = c_0^2 \rho'$  e  $c_0$  constante, conforme abordagem utilizada por KINSLER *et al.* [72] e GOLDSTEIN [71], tem-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{D_0(p')}{Dt} = 0 \quad (3.3)$$

Do mesmo modo, o processo de linearização para a equação de conservação do momento linear, (2.1), fornece:

$$\frac{\rho_0 D_0 \mathbf{u}'}{Dt} - \mu \nabla^2 \mathbf{u}' = - \left[ 1 + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left( \frac{\mu}{3} + \mu_b \right) \frac{D_0}{Dt} \right] \nabla p' \quad (3.4)$$

Ao derivar em relação ao tempo a equação de conservação da massa linearizada (3.3), subtrair do divergente da equação do momento linearizada (3.4), tem-se:

$$\frac{1}{c_0^2} \left( \frac{D_0^2 p'}{Dt^2} \right) - \left[ 1 + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left( \frac{\mu}{3} + \mu_b \right) \frac{D_0}{Dt} \right] \nabla^2 p' + \mu \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}') = 0 \quad (3.5)$$

Ao substituir a equação (3.3) no último termo do lado direito de (3.5), tem-se:

$$\frac{1}{c_0^2} \left( \frac{D_0^2 p'}{Dt^2} \right) - \left[ 1 + \tau_s \frac{D_0}{Dt} \right] \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = 0 \quad (3.6)$$

sendo  $\tau_s$  o coeficiente dependente da viscosidade, com dimensão de tempo, dado abaixo:

$$\tau_s = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left( \frac{4\mu}{3} + \mu_b \right) \quad (3.7)$$

O coeficiente dado por (3.7) é chamado de tempo de relaxamento ou acomodação, sendo interpretado como um tempo para o sistema atingir equilíbrio quando ocorrem variações de massa específica ou temperatura [72].

O operador obtido na equação (3.6) é dado por:

$$\mathcal{F}_L \equiv \left( \frac{1}{c_0^2} \frac{D_0^2}{Dt^2} - \nabla^2 - \tau_s \frac{D_0}{Dt} \nabla^2 \right) \quad (3.8)$$

A equação (3.6) pode ser reduzida à formulação estudada por KINSLER *et al.* [72] ao fazer  $U_0 = 0$  e  $\tau_s \neq 0$ , obtendo-se:

$$\frac{1}{c_0^2} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \right) - \left[ 1 + \tau_s \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = 0 \quad (3.9)$$

fazendo  $\tau_s = 0$  e  $U_0 \neq 0$ , tem-se a formulação estudada por BRAMBLEY [21] e GOLDSTEIN [71]:

$$\frac{1}{c_0^2} \left( \frac{D_0^2 p'}{Dt^2} \right) - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = 0 \quad (3.10)$$

A equação (3.6) também pode ser obtida, em sua forma não viscosa, a partir da formulação de Lilley (2.32), ao desconsiderar as fontes, produtos de flutuação, considerar  $c_0$  e  $U_0$  uniformes, além de tomar  $\pi = p'$ .

Nota-se que o operador (3.8) é essencialmente idêntico ao segundo termo do operador obtido por DOKUMACI [26], definido em (2.47). De fato, é possível ilustrar as relações entre os operadores, (2.47), (2.46), (2.45) e (3.8), através do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_D & \xrightarrow{\kappa=0} & \mathcal{F}_L \xrightarrow{U_0=0} \mathcal{F}_K \\ & \tau_s=0 \downarrow & \\ & \mathcal{F}_{RT} & \end{array} \quad (3.11)$$

O diagrama (3.11) mostra as diferentes considerações em cada operador de onda, possibilitando uma rápida avaliação das diferenças sem contudo entrar nos detalhes de cada equação.

### 3.3 Solução da equação convectada

O campo acústico em um duto de seção transversal circular constante, pode ser escrito como uma soma infinita de modos. Isto é, expande-se a solução no espaço de funções características do problema, as autofunções [19].

Considerando a decomposição de Fourier em variáveis cilíndricas,  $(r, \theta, z)$ , e uma solução do tipo  $e^{-im\theta} e^{-ik_z z} e^{i\omega t}$  [18, 21], tem-se:

$$p'(r, \theta, z, t) = \text{Re}\{p_r(r) e^{-im\theta} e^{-ik_z z} e^{i\omega t}\} \quad (3.12)$$

sendo  $m$  um inteiro,  $k_z$  o número de onda axial e  $\omega$  a frequência angular da perturbação.

A equação (3.6) é colocada na seguinte forma:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D_0^2 p'}{Dt^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} - \tau_s \frac{D_0}{Dt} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Considerando coordenadas cilíndricas para os termos da equação (3.13), tem-se para o primeiro termo:

$$\frac{D_0^2 p'(r, \theta, z, t)}{Dt^2} = (-\omega^2 + 2U_0 \omega k_z - U_0^2 k_z^2) p_r(r) e^{-im\theta} e^{-ik_z z} e^{i\omega t} \quad (3.14)$$

e para o segundo termo:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p' &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \partial p'}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = \\ &\left[ \frac{d^2 p_r(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_r(r)}{dr} - \frac{p_r(r) m^2}{r^2} - p_r(r) k_z^2 \right] e^{-im\theta} e^{-ik_z z} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.15)$$

finalmente, para o terceiro termo:

$$\frac{D_0}{Dt} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} \right) + U_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} \right) \quad (3.16)$$

Os termos do lado direito da equação acima, (3.16), são expandidos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} \right) + U_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} \right) &= \\ i(\omega - k_z U_0) \left[ \frac{d^2 p_r(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_r(r)}{dr} - \frac{p_r(r) m^2}{r^2} - p_r(r) k_z^2 \right] e^{-im\theta} e^{-ik_z z} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ao substituir as equações (3.14) a (3.17) em (3.6), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} (-\omega^2 + 2U_0 \omega k_z - U_0^2 k_z^2) p_r(r) + \\ (ik_z U_0 \tau_s - 1 - \tau_s i\omega) \left[ \frac{d^2 p_r(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_r(r)}{dr} - \frac{p_r(r) m^2}{r^2} - p_r(r) k_z^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Busca-se colocar a equação (3.18) na forma clássica da equação de Bessel, para a qual as soluções são bem conhecidas e estudadas detalhadamente por WATSON

[105], GRAY *et al.* [106], LEBEDEV [107] e KORENEV [108].

Definindo as seguintes expressões:

$$\frac{1}{c_0^2} (-\omega^2 + 2U_0\omega k_z - U_0^2 k_z^2) = \psi_1 \quad (3.19)$$

$$[-1 + i\tau_s(k_z U_0 - \omega)] = \psi_2 \quad (3.20)$$

substituindo (3.19) e (3.20) em (3.18), tem-se:

$$\psi_2 \frac{d^2 p_r(r)}{dr^2} + \psi_2 \frac{1}{r} \frac{dp_r(r)}{dr} + \left[ \psi_1 + \left( \frac{m^2}{r^2} + k_z^2 \right) + \tau_s i \left( \frac{m^2}{r^2} + k_z^2 \right) (\omega - k_z U_0) \right] p_r(r) = 0 \quad (3.21)$$

Ao multiplicar (3.21) por  $\frac{r^2}{p_r(r)}$ , e considerar que  $p_r(r) \neq 0$  localmente, obtém-se:

$$r^2 \frac{d^2 p_r(r)}{dr^2} + r \frac{dp_r(r)}{dr} = \left[ m^2 - r^2 \left( \frac{\psi_1 + k_z^2 + i\tau_s k_z^2 (\omega - k_z U_0)}{\psi_2} \right) \right] p_r(r) \quad (3.22)$$

Se a função  $p_r(r)$  se anular no campo de soluções, deve-se ter cuidado para a definição dos domínios de integração da função  $p_r(r)$ , evitando-se as singularidades [109].

Define-se o seguinte termo do argumento da equação (3.22):

$$\alpha^2 = \left( \frac{\psi_1 + k_z^2 + i\tau_s k_z^2 (\omega - k_z U_0)}{\psi_2} \right) = \frac{\psi_1}{\psi_2} - k_z^2 \quad (3.23)$$

A razão de números complexos  $\frac{\psi_1}{\psi_2}$  é avaliada através da multiplicação do conjugado do denominador, fornecendo:

$$\frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{\psi_1 (-1 - i\tau_s (k_z U_0 - \omega))}{[1 + \tau_s^2 (k_z U_0 - \omega) (k_z U_0 - \omega)]} = \frac{-\psi_1 (1 + i\tau_s (k_z U_0 - \omega))}{[1 + \tau_s^2 (k_z U_0 - \omega) (k_z U_0 - \omega)]} \quad (3.24)$$

observando que  $\psi_1$ , (3.19), pode ser aglutinado como mostrado abaixo, tem-se:

$$\alpha^2 = \frac{\overbrace{(k_z U_0 - \omega)^2}^{-\psi_1}}{c_0^2} \frac{(1 + i\tau_s (k_z U_0 - \omega))}{[1 + \tau_s^2 (k_z U_0 - \omega) (k_z U_0 - \omega)]} - k_z^2 \quad (3.25)$$

que é equivalente à seguinte expressão:

$$\alpha = \sqrt{\frac{(k_z U_0 - \omega)^2}{c_0^2 [1 + \tau_s^2 (k_z U_0 - \omega)^2]} + \frac{i \tau_s (k_z U_0 - \omega)^3}{c_0^2 [1 + \tau_s^2 (k_z U_0 - \omega)^2]}} - k_z^2 \quad (3.26)$$

A equação (3.26) pode ser expressa em termos de coeficientes adimensionais definidos por:

$$k \equiv \frac{\omega}{c_0}, \quad M \equiv \frac{U_0}{c_0} \quad (3.27)$$

sendo  $k$  o número de onda e  $M$  o número de Mach.

Define-se a seguinte grandeza, com dimensão de comprimento:

$$\tau_{s*} = \tau_s c_0 \quad (3.28)$$

resultando então em  $\alpha(k, k_z, M, \tau_{s*})$  dado por:

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{(k_z M - k)^2 - k_z^2 [1 + \tau_{s*}^2 (k_z M - k)^2] + i \tau_{s*} (k_z M - k)^3}{[1 + \tau_{s*}^2 (k_z M - k)^2]}} \quad (3.29)$$

A solução da equação (3.22) é obtida por [105–107]:

$$p_r(r) = A J_m(\alpha r) + B Y_m(\alpha r) \quad (3.30)$$

sendo  $A$  e  $B$ , amplitudes constantes, e  $J_m$  e  $Y_m$  as funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, respectivamente. Sendo a solução radial regular ou finita em  $r = 0$  [19, 21], tem-se que  $B = 0$ , uma vez que  $Y_m$  não é finita na origem [105].

Assim, a solução radial é dada por:

$$p_r(r) = A J_m(\alpha r) \quad (3.31)$$

### 3.3.1 Condição de contorno

As condições de contorno impõem restrições ao argumento  $\alpha$  [21]. Tem-se, geralmente, as seguintes condições de contorno na parede [18]:

- Parede rígida;
- Parede com impedância acústica finita.

A condição de contorno com impedância finita, em uma superfície impermeável, considerando a presença de escoamento foi desenvolvida por MYERS [74], sendo representada por:

$$i\omega \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} = (i\omega + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{n}) \frac{p'}{\mathbf{Z}} \quad (3.32)$$

sendo  $\mathbf{Z}$  a impedância acústica e  $\mathbf{n}$  o vetor normal à superfície na condição de contorno.

Apesar de considerar inicialmente, para fins de limitação de escopo, a condição de contorno de parede rígida, na realidade a impedância acústica do duto pode ser finita [18, 19, 39]. Deste modo, as flutuações das pressões acústicas podem atuar como fonte para a estrutura do duto. Neste caso, conforme relatado no Capítulo 2, a literatura frequentemente separa oscilações de baixa frequência do campo acústico com vibrações de baixa frequência no duto, denominado "vibração induzida pelo escoamento" (VIE), e as vibrações de alta frequência do campo acústico excitando modos de alta ordem da estrutura do duto sendo denominados de "vibração induzida acusticamente" (VIA).

BRAMBLEY [21] aponta instabilidades numéricas na formulação de MYERS [74] e mostra [110] que estas instabilidades tem como causa o fato da condição de contorno (3.32) ser um problema matematicamente mal posto, no sentido de HADAMARD [111]. BRAMBLEY [112] deduz então uma nova condição de contorno modificada e bem posta, testando sua validade através de simulações numéricas. RIENSTRA e DARAU [113] também deduzem uma nova condição de contorno bem posta, levando em conta a existência de uma espessura finita da camada limite, todavia sem simulações numéricas.

A condição de contorno de parede rígida é considerada neste trabalho e a solução, para um escoamento médio uniforme, é válida fora da camada limite [27], tomada como suficientemente pequena, de modo que os efeitos de um escoamento não uniforme sejam desconsiderados.

Assim, considerando a condição de contorno para uma parede rígida, tem-se:

$$\left. \frac{dp_r(r)}{dr} \right|_{r=R} = 0 \Rightarrow J'_m(\alpha R) = 0 \quad (3.33)$$

sendo  $R$  o raio interno do duto.

Para cada  $m$  inteiro, existem infinitas raízes da função de Bessel de primeiro tipo, indexadas por  $n$ . Os valores discretos tornam o coeficiente  $\alpha = \alpha_{mn}$ .

### 3.3.2 Relação de dispersão

A partir da equação (3.29), pode-se obter a seguinte relação de dispersão para o coeficiente axial  $k_{zmn}$ :

$$k_{zmn}^4 - \frac{(i\tau_{s*}M^3 + 2Mk\tau_{s*}^2)k_{zmn}^3}{\tau_{s*}^2M^2} - \frac{(M^2 - i\tau_{s*}3M^2 - \alpha_{mn}^2M^2\tau_{s*}^2 - \tau_{s*}^2k^2 - 1)k_{zmn}^2}{\tau_{s*}^2M^2} - \frac{(i\tau_{s*}3Mk^2 - 2Mk + 2Mk\alpha_{mn}^2\tau_{s*}^2)k_{zmn}}{\tau_{s*}^2M^2} + \frac{ik^3}{\tau_{s*}M^2} - \frac{\tau_{s*}^2M^2}{\tau_{s*}^2M^2} \frac{(1 - \alpha_{mn}^2\tau_{s*}^2)k^2}{\tau_{s*}^2M^2} + \frac{\alpha_{mn}^2}{\tau_{s*}^2M^2} = 0 \quad (3.34)$$

A equação, (3.34), retoma formulações conhecidas, para o caso invíscido, dadas por RIENSTRA [19] e HIRSCHBERG e RIENSTRA [18] no limite  $\tau_{s*} \rightarrow 0$ , quando se obtém:

$$k_{zmn}^2 - (Mk_{zmn} - k)^2 + \alpha_{mn}^2 = 0 \quad (3.35)$$

No caso invíscido, (3.35), a solução pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$k_{zmn} = \frac{-Mk \pm \sqrt{k^2 - (1 - M^2)\alpha_{mn}^2}}{(1 - M^2)} \quad (3.36)$$

A relação de dispersão entre  $k_{zmn}$  e  $\alpha_{mn}$ , (3.34) é uma equação do quarto grau, com coeficientes complexos e as características físicas do problema impõem restrições sobre os sinais das partes reais e imaginárias das raízes complexas de  $k_{zmn}$  [19].

A equação (3.34) possui o último grau algébrico no qual a solução pode ser encontrada por uma fórmula contendo um número finito de adições, subtrações, multiplicações e radicais [114]. Em particular, o Teorema Fundamental da Álgebra, ao mostrar que todo polinômio  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ , com coeficientes complexos, tem uma raiz em  $\mathbb{C}$ , se aplica. A demonstração mostra que uma função de variável complexa, que satisfaça as equações de *Cauchy – Riemann*, ou é constante ou admite uma fatorização em séries de potências, implicando a existência de uma raiz. Detalhes podem ser obtidos nos trabalhos de STEIN e SHAKARCHI [109] e AHLFORS [115].

Pode-se representar (3.34) na seguinte equação de quarto grau generalizada:

$$k_{mn}^4 + ak_{mn}^3 + bk_{mn}^2 + ck_{mn} + d = 0 \quad (3.37)$$

com coeficientes definidos por:



$$a \equiv - \frac{(\mathrm{i}\tau_{s*}M^3 + 2Mk\tau_{s*}^2)}{\tau_{s*}^2M^2} \quad (3.38)$$

$$b \equiv - \frac{(M^2 - \mathrm{i}\tau_{s*}3M^2 - \alpha_{mn}^2M^2\tau_{s*}^2 - \tau_{s*}^2k^2 - 1)}{\tau_{s*}^2M^2} \quad (3.39)$$

$$c \equiv - \frac{(\mathrm{i}\tau_{s*}3Mk^2 - 2Mk + 2Mk\alpha_{mn}^2\tau_{s*}^2)}{\tau_{s*}^2M^2} \quad (3.40)$$

$$d \equiv \frac{\mathrm{i}k^3}{\tau_{s*}M^2} - \frac{(1 - \alpha_{mn}^2\tau_{s*}^2)k^2}{\tau_{s*}^2M^2} + \frac{\alpha_{mn}^2}{\tau_{s*}^2M^2} \quad (3.41)$$

As soluções de (3.34) são dadas por ([114], capítulo 1):

$$-\frac{a}{4} + \frac{H}{2} \pm \frac{\alpha}{2}, -\frac{a}{4} + \frac{H}{2} \pm \frac{\beta}{2} \quad (3.42)$$

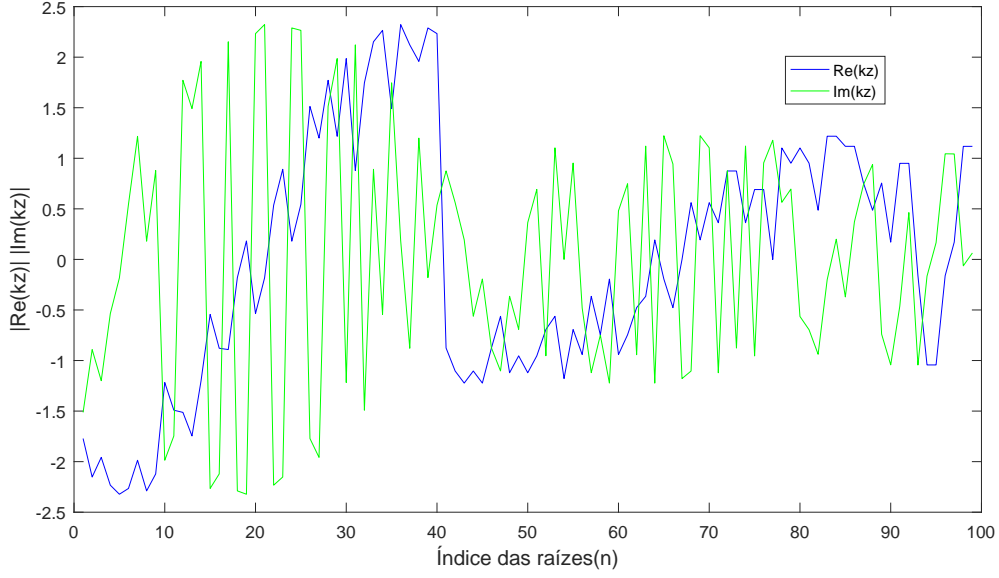
sendo  $H = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} + y$ , e  $y$  qualquer raiz da equação cúbica [114]:

$$y^3 - by^2 + (ac + 4d)y - a^2d + 4bd - c^2 = 0 \quad (3.43)$$

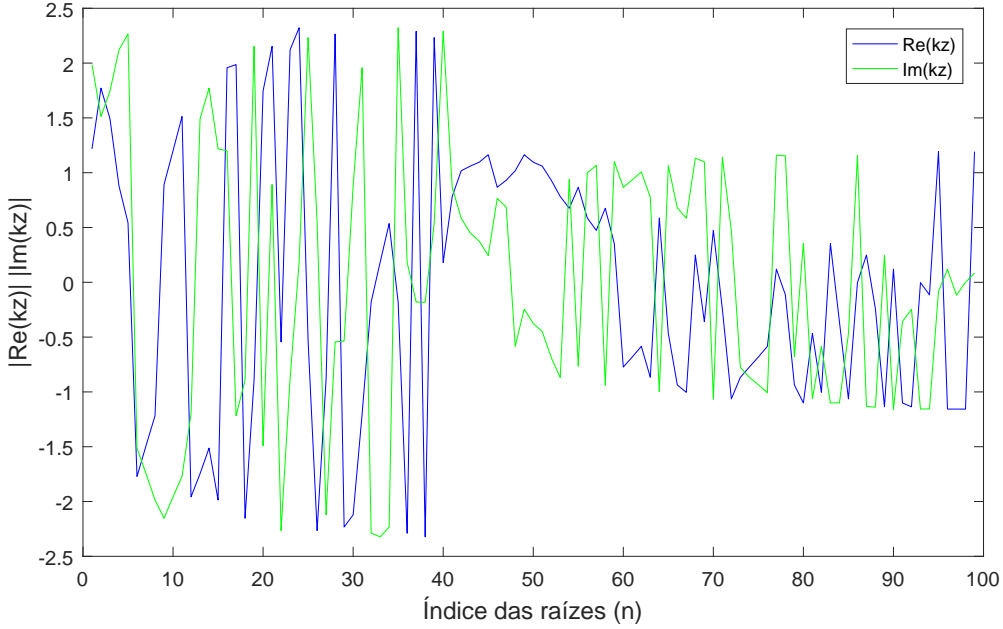
enquanto:

$$\alpha, \beta = \begin{cases} \sqrt{\frac{3a^2}{4} - H^2 - 2b \pm \frac{4ab - 8c - a^3}{4H}}, & H \neq 0 \\ \sqrt{\frac{3a^2}{4} - 2b \pm 2\sqrt{y^2 - 4d}}, & H = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Ao atribuir valores para os parâmetros da relação de dispersão, é possível obter a Figura 3.1, que mostra os valores de partes reais e imaginárias das raízes de (3.38) para os dez primeiros modos radiais em frequências de excitação diferentes. Considera-se que o regime é subsônico, e as propriedades de massa específica, velocidade do som e viscosidade dinâmica consideradas como as do ar,  $\rho_0 = 1,205 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_0 = 340 \text{ m/s}$ ,  $\mu = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m.s)}$ . A viscosidade de expansão foi considerada como uma fração,  $\mu_b = 0,7\mu$ , da viscosidade dinâmica, conforme sugerido por CRAMER [116]. Verifica-se a existência de regiões com partes real e imaginária com sinais opostos e também regiões nas quais os sinais são iguais, sendo condizente com a existência dos denominados modos anômalos, observados por DOKUMACI [26].



(a)  $M = 0.5$  e frequência de 2000 Hz.



(b)  $M = 0.5$  e frequência de 20 Hz.

Figura 3.1: Relação entre as partes imaginária e real de raízes de (3.38), para cada índice de raiz  $n$ .

O Teorema Fundamental da Álgebra implica, como corolário, que a parte imaginária do número de onda axial é sempre não nula ([109], capítulo 4, Corolário 4.7), no caso viscoso, e todos os modos apresentam decaimento, um resultado bem conhecido. Além disso, observa-se que um polinômio  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ , com coeficientes complexos,  $a_n \neq 0$ , tem exatamente  $n$  raízes e todas se encontram dentro de um disco aberto, centrado na origem, com raio dado por ([114], capítulo 1, Teorema 1.2.1):

$$r = 1 + \max_{0 \leq \nu \leq n-1} \left( \frac{|a_\nu|}{|a_n|} \right) \quad (3.45)$$

O resultado explicitado por (3.45) indica que, dependendo dos módulos dos coeficientes complexos da relação de dispersão, pode-se ter um decaimento reduzido do modo acústico. O decaimento representado pela parte imaginária é limitado pelo maior módulo dos coeficientes, de fato:

$$0 < |\text{Im}(k_{zmn})| < \left[ 1 + \max_{0 \leq \nu \leq n-1} \left( \frac{|a_\nu|}{|a_n|} \right) \right] \quad (3.46)$$

Uma conclusão da desigualdade (3.46) é que a máxima magnitude de atenuação, considerando escoamento de um fluido viscoso, pode ser avaliada sem a solução da relação de dispersão, bastando uma simples inspeção dos seus coeficientes. A melhora da estimativa, para o limite inferior dos zeros de polinômios de coeficientes complexos, passa por restrições nos valores de seus coeficientes, uma revisão abrangente do assunto é dada no trabalho de GARDNER e GOVIL [117].

Verifica-se que a obtenção de critérios analíticos, para a existência de ondas evanescentes e propagantes, fica sobremaneira dificultada pela complexidade das raízes. Com efeito, no caso invíscido, a obtenção das raízes já exige a utilização de métodos numéricos adequados, sendo um item particularmente crítico na condição de propagação acústica em dutos com parede não rígida, conforme pode ser observado em trabalhos de RIENSTRA e TESTER [39], DOKUMACI [26] e BRAMBLEY [21].

### 3.3.3 Expressão para a flutuação da pressão

A norma de uma função de Bessel de primeiro tipo pode ser definida pela seguinte expressão ([106], capítulo 6, equação 109):

$$\int_0^a J_m^2(\alpha_{mn}r) r dr = \frac{a^2}{2} \left[ J_m'^2(\alpha_{mn}a) + \left( 1 - \frac{m^2}{\alpha_{mn}^2 a^2} \right) J_m^2(\alpha_{mn}a) \right] = \|J_m(\alpha_{mn}r)\|^2 \quad (3.47)$$

sendo  $m, n \in \mathbb{Z}_+$  e  $a$  o raio do domínio considerado.

Pode-se normalizar os modos da solução (3.31), multiplicando-se por  $\Lambda_{mn} = \|J_m(\alpha_{mn}r)\|^{-1}$ , e usando a condição de contorno (3.33):

$$\Lambda_{mn} = \frac{1}{\left( \frac{R^2}{2} \left[ \left( 1 - \frac{m^2}{\alpha_{mn}^2 R^2} \right) J_m^2(\alpha_{mn}R) \right] \right)^{1/2}} \quad (3.48)$$

sendo  $R$  o raio interno do duto. Geralmente, pode-se tomar o raio interno do duto

como unitário sem prejuízo da generalidade [18, 19, 21].

Considerando a condição de contorno de parede rígida na superfície, (3.33), tem-se para solução da flutuação da pressão normalizada em modos::

$$p'(r, \theta, z, t) = \text{Re} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{mn} J_m(\alpha_{mn} r) (A_{mn} e^{-ik_{zmn} z} + B_{mn} e^{+ik_{zmn} z}) e^{-im\theta} e^{i\omega t} \right] \quad (3.49)$$

sendo  $A_{mn}$  e  $B_{mn}$  coeficientes para ondas se propagando no sentido positivo e negativo de  $z$ , respectivamente. O autovalor,  $\alpha_{mn}$ , é dado pela equação (3.29). A forma da equação (3.49) é bem conhecida e similar às obtidas por RIENSTRA [19] e MUNJAL [57].

### 3.3.4 Influência da frequência nos termos de viscosidade

Pode-se avaliar a influência da frequência nos termos viscosos da equação (3.29), através da definição de um Reynolds acústico, para meio estacionário [118]:

$$Re_{ac} = \frac{\rho_0 c_0 \lambda}{\mu^*} \quad (3.50)$$

sendo  $\lambda$  o comprimento de onda acústico e  $\mu^*$  a viscosidade.

Ao aplicar a equação (3.50) na expressão para o coeficiente  $\tau_{s*}$ , (3.28), tem-se:

$$\tau_{s*} \equiv \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( \frac{4\mu}{3} + \mu_b \right) = \lambda \left( \frac{4}{3Re_{ac\mu}} + \frac{1}{Re_{ac\mu_b}} \right) \quad (3.51)$$

A partir de (3.51) pode-se verificar que o coeficiente  $\tau_{s*}$  é proporcional à frequência. Quanto maior a frequência, menor  $Re_{ac1}$  e  $Re_{ac2}$ , e tanto maior é o efeito da viscosidade.

DOKUMACI [26, 73] considera os efeitos viscotérmicos na propagação de ondas em dutos com impedância finita, sendo considerados relevantes para a atenuação sonora. No trabalho realizado por KHAMIS e BRAMBLEY [28], para a propagação de uma onda plana sobre uma superfície com impedância finita, conclui-se que a viscosidade tem papel significativo, reduzindo a reflexão de modos propagantes em determinado sentido e aumentando a reflexão de modos cruzados.

CRAMER [116] reporta casos em que a viscosidade de expansão foi medida com valores várias ordens de grandeza superior à viscosidade dinâmica, salientando que a viscosidade de expansão pode ser tanto mais importante quanto maiores os efeitos de compressibilidade e em altas frequências. Deste modo, pode-se argumentar que a inclusão da viscosidade se justifica ao tratarmos com propagação em frequências

mais altas. Os efeitos da viscosidade de expansão são também muito importantes na presença de gradientes espaciais de densidade significativos, como em ondas de choque [119].

Com efeito, caracterizações experimentais e teóricas da atenuação sonora, em propagação no ar, indicam que os efeitos da viscosidade de expansão são devidos à relaxamento molecular, suficiente para afetar a propagação de energia acústica no meio. A viscosidade de expansão é especialmente relevante em gases multiatômicos e, portanto, potencialmente em aplicações industriais da indústria de petróleo, nos quais seus efeitos se acumulam em cada ciclo de propagação acústica [119]. Em particular, LIN *et al.* [119] apresentam um modelo para a viscosidade de expansão que pode ser utilizado em condições de absorção de energia acústica em domínio da frequência, em situações próximas ao equilíbrio termodinâmico.

### 3.3.5 Influência do número de Helmholtz na equação (3.6)

Define-se o número de Helmholtz,  $He$ , como:

$$\frac{L^2}{c_0^2 \tau^2} \equiv He^2 \quad (3.52)$$

sendo  $L$  uma escala de comprimento.

Introduzindo coeficientes adimensionais  $\bar{t} = \frac{t}{\tau} = \omega t$ ,  $\bar{x}_i = \frac{x_i}{L}$  ao operador de onda convectado, (3.6), tem-se:

$$\begin{aligned} (He)^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{t}^2} + (He)(M) \frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{t} \partial \bar{x}_j} + (He)(M) \frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{x}_j \partial \bar{t}} + (M)^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j} - \frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{x}_i^2} - \\ \left( \frac{\tau_s}{\tau} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{x}_i^2} \right) - \left( \frac{\tau_s}{\tau} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{x}_i^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

sendo  $\tau \equiv \frac{L}{U_0}$  uma escala de tempo do escoamento médio.

Verifica-se que a inclusão do escoamento médio e da viscosidade no operador (3.6) implica na necessidade de avaliação das magnitudes da velocidade média e das escalas de tempo viscoso para avaliar o caso em que o número de Helmholtz é muito pequeno. Em suma, fazendo  $He \rightarrow 0$ , tem-se:

$$(M)^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j} - \frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{x}_i^2} - \left( \frac{\tau_s}{\tau} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{x}_i^2} \right) - \left( \frac{\tau_s}{\tau} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{x}_i^2} \right) = 0 \quad (3.54)$$

quando  $M^2 \ll 1$  e  $\mu = \mu_b \rightarrow 0$ , tem-se:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial \bar{x}_i^2} \sim 0 \quad (3.55)$$

A equação (3.54) mostra que, na presença de escoamento médio e viscosidade, um operador de onda convectado, no limite de pequenos números de Helmholtz, não satisfaz a equação de Laplace, tendo um comportamento que se desvia do harmônico tanto maior é a velocidade média e viscosidade. Neste caso, as propriedades da flutuação de pressão ou de outra variável acústica, sofrem influência da direcionalidade e o conceito de compacidade acústica para fontes em movimento perde suas características de simetria, típicas de funções harmônicas. Com um número de Reynolds elevado tem-se que os efeitos viscosos tornam-se cada vez menores, conforme pode ser observado ao adimensionalizar a equação do momento como função do número de Reynolds:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_i^2} \right) \quad (3.56)$$

sendo  $Re = \rho U/L$  o número de Reynolds e a barra indicando grandezas adimensionais.

### 3.3.6 Influência dos efeitos térmicos

Desconsiderar a condutividade térmica é tanto mais válido quanto menor for o raio do duto [120, 121]. Esta condição foi estudada por RAYLEIGH [41] e pode ser expressa em termos dos números de Stokes,  $S_h$ , e Prandtl,  $Pr$ , como [26]:

$$S_h^2 \ll 1 \quad e \quad S_h^2 Pr^2 \ll 1 \quad (3.57)$$

O número de Stokes pode ser definido por:

$$S_h = R \sqrt{\frac{\rho_0 \omega}{\mu}} \quad (3.58)$$

sendo  $R$  o raio interno do duto.

O número de Prandtl pode ser definido por:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa} \quad (3.59)$$

A condição (3.57) estabelece critérios para definir a validade da hipótese de incluir a viscosidade e desconsiderar a condutividades térmica. Com efeito, quando o diâmetro do duto é reduzido, a condução de calor do centro para os limites se torna

mais facilitada, de modo que, no limite, a temperatura das paredes sólidas controla a temperatura do fluido, com expansões e rarefações isotérmicas ([122], capítulo XIX, página 326).

De fato, ao considerar que a condição em (3.57) não seja satisfeita, isto é, que efeitos térmicos não possam ser negligenciados, a equação da energia implica em variações entrópicas, sendo dada por [26]:

$$\rho_0 T_0 \frac{Ds'}{Dt} = \kappa_0 \nabla^2 T' \quad (3.60)$$

A equação de estado para a flutuação da entalpia  $s'$  fica então:

$$s' = \left( \frac{c_{p0}}{T_0} \right) T' - \left( \frac{\beta_0}{\rho_0} p' \right) \quad (3.61)$$

sendo  $\beta_0$  o coeficiente de expansão térmica.

Do mesmo modo, para equação de estado para a flutuação da pressão, tem-se:

$$p' = \left( \frac{c_0^2}{\gamma_0} \right) \rho' + \left( \frac{\beta_0 \rho_0 c_0^2}{\gamma_0} T' \right) \quad (3.62)$$

Ao substituir as expressões (3.60), (3.61) e (3.62) no processo de obtenção de (3.8), obtém-se a seguinte equação:

$$\left\{ \frac{1}{c_0^2} \frac{D_0^3}{Dt^3} - \tau_s \frac{D_0^2}{Dt^2} \nabla^2 - \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left( \frac{\gamma_0 \kappa_0}{c_{p0}} \right) \frac{D_0^2}{Dt^2} \nabla^2 - \frac{D_0}{Dt} \nabla^2 + \frac{\tau_s}{\rho_0} \frac{\gamma_0 \kappa_0}{c_{p0}} \frac{D_0}{Dt} \nabla^4 + \frac{\kappa_0}{\rho_0 c_{p0}} \nabla^4 \right\} T' = 0 \quad (3.63)$$

A expressão (3.63), que representa a propagação acústica, incluindo efeitos viscosos e térmicos, em dutos com escoamento médio uniforme, é a mesma expressão obtida por DOKUMACI [26]. A resolução é obtida através da decomposição de Fourier e as condições de contorno podem incluir o caso de parede não rígida. A relação de dispersão advinda desta equação exige métodos numéricos para sua solução. Uma função de Green para esta forma de operador ainda não é conhecida na literatura. O procedimento para a obtenção de uma função de Green para o operador desenvolvido por MATTHEWS [40] pode ser utilizado em (3.63). Na próxima seção uma função de Green para o operador (3.8) é obtida através do procedimento utilizado por RIENSTRA e TESTER [39].

# Capítulo 4

## Função de Green

Neste capítulo é obtida uma função de Green para o operador de onda encontrado em (3.6). É utilizada a decomposição de Fourier em coordenadas cilíndricas, seguida da identificação do contorno de integração para a função e cálculo dos resíduos da função de variável complexa encontrada [39]. A função de Green permite que a equação diferencial e as condições de contorno sejam combinadas em uma equação integral [38, 123].

### 4.1 Obtenção da função de Green

A função de Green para o operador (3.8) satisfaz a seguinte relação:

$$\left( \frac{1}{c_0^2} \frac{D_0^2}{Dt^2} - \nabla^2 - \tau_s \frac{D_0}{Dt} \nabla^2 \right) G(r, \theta, z; r_0, \theta_0, z_0) = \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

sendo  $G(r, \theta, z; r_0, \theta_0, z_0)$  a resposta de uma fonte pontual na posição  $\mathbf{z}_0$ .

Ao expressar a função delta de Dirac em coordenadas cilíndricas, tem-se [40]:

$$\delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) = \frac{\delta(r - r_0)}{r} \delta(\theta - \theta_0) \delta(z - z_0) \quad (4.2)$$

Expressando (4.2) em uma série de Fourier em  $\theta$  e de uma integral de Fourier em  $z$ , semelhante à decomposição em (2.18), obtém-se [39]:

$$\delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) = \frac{\delta(r - r_0)}{r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma(z-z_0)} d\sigma \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im(\theta-\theta_0)} \quad (4.3)$$

sendo  $m$  um inteiro.

A representação de (4.3) nas três variáveis cilíndricas,  $(r, \theta, z)$ , implica na forma da função de Green dada por [39]:



$$G(r, \theta, z; r_0, \theta_0, z_0) = \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im(\theta-\theta_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_m(r, \sigma) e^{-i\sigma(z-z_0)} d\sigma \right] e^{i\omega t} \quad (4.4)$$

sendo  $\sigma$  o número de onda axial e  $\widehat{G}_m(r, \sigma)$  a componente circunferencial da decomposição de Fourier da função de Green.

Ao substituir as equações (4.4) e (4.3) em (4.1), chega-se na seguinte equação de Bessel não homogênea [39]:

$$\left[ \frac{\partial^2 \widehat{G}_m(r, \sigma)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{G}_m(r, \sigma)}{\partial r} + \left( \alpha_G^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \widehat{G}_m(r, \sigma) \right] = \frac{\delta(r - r_0)}{4\pi^2 r} \quad (4.5)$$

com  $\alpha_G$  dado por:

$$\alpha_G \equiv \sqrt{\frac{(\sigma M - k)^2 - \sigma^2 [1 + \tau_{s*}^2 (\sigma M - k)^2] + i\tau_{s*} (\sigma M - k)^3}{[1 + \tau_{s*}^2 (\sigma M - k)^2]}} \quad (4.6)$$

Pode-se utilizar o método da variação de parâmetros para obter uma solução particular da equação (4.5), [105, 108]. O método de variação de parâmetros consiste em utilizar o espaço de soluções da solução homogênea, caracterizado com uma lista de vetores linearmente independentes, para gerar o espaço de soluções particular, variando os coeficientes de modo a obedecer às mesmas condições da solução homogênea. A solução geral é a soma da solução homogênea e da solução particular.

O método de variação de parâmetros fornece para a solução particular:

$$G_p(\alpha_G r) = \frac{1}{8\pi} [J_m(\alpha_G r_0) Y_m(\alpha_G r) - J_m(\alpha_G r) Y_m(\alpha_G r_0)] \quad (4.7)$$

A expressão (4.7) é semelhante à encontrada por RIENSTRA e TESTER [39], a menos dos termos  $\alpha_G$ , e a sua dedução é dada no Apêndice C. A solução completa é dada por:

$$\widehat{G}_m(r, \sigma) = A(\sigma) J_m(\alpha_G r) + H(r - r_0) \frac{1}{8\pi} [J_m(\alpha_G r_0) Y_m(\alpha_G r) - J_m(\alpha_G r) Y_m(\alpha_G r_0)] \quad (4.8)$$

sendo  $H$  a função de Heaviside, incluída de modo a excluir soluções que retornem à origem e  $A(\sigma)$  a constante da solução homogênea [39].

### 4.1.1 Condição de contorno

Ao considerar a condição de contorno de parede rígida:

$$\left. \frac{\partial \widehat{G}_m(r, \sigma)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (4.9)$$

tem-se, para  $r > r_0$ :

$$A(\sigma) = \frac{1}{8\pi J'_m(\alpha_G R)} [J'_m(\alpha_G R) Y_m(\alpha_G r_0) - J_m(\alpha_G r_0) Y'_m(\alpha_G R)] \quad (4.10)$$

Ao substituir a expressão (4.10) em (4.8), resulta:

$$\widehat{G}_m(r, \sigma) = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{J_m(\alpha_G r_0)}{J'_m(\alpha_G R)} \right) [J'_m(\alpha_G R) Y_m(\alpha_G r) - J_m(\alpha_G r) Y'_m(\alpha_G R)] \quad (4.11)$$

Logo, para a componente circunferencial de (4.4), obtém-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_m(r, \sigma) e^{-i\sigma(z-z_0)} d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8\pi} \left( \frac{J_m(\alpha_G r_0)}{J'_m(\alpha_G R)} \right) [J'_m(\alpha_G R) Y_m(\alpha_G r) - J_m(\alpha_G r) Y'_m(\alpha_G R)] e^{-i\sigma(z-z_0)} d\sigma \quad (4.12)$$

O integrando da equação (4.12) é uma função meromorfa, B.6, possuindo singularidades isoladas chamadas de polos. Os conceitos de análise complexa necessários ao entendimento da função são apresentados no Apêndice B e demonstra-se a meromorficidade de (4.11) no Apêndice C. A estratégia é mostrar que a função (4.11) é uma razão de funções holomorfas, logo, meromorfa. Para isso, obtém-se o raio de convergência das funções de Bessel. A partir deste resultado, utiliza-se o fato de que uma série de potências determina uma função holomorfa em seu raio de convergência, Teorema B.5, que somas e produtos de funções holomorfas são holomorfas, Teorema B.1, e que a derivada de uma série de potências tem o mesmo raio de convergência da série original, novamente através do Teorema B.5, completando o argumento.

Destaca-se que o domínio considera apenas as condições de contorno na parede do duto, considerado infinito para negligenciar as condições nas extremidades.

### 4.1.2 Cálculo dos resíduos

Para avaliar a equação (4.12), utiliza-se o resultado dado pelo Teorema B.8:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}_{z_k} f. \quad (4.13)$$

sendo  $\text{res}_{z_k} f$  o resíduo de  $f(z)$  em  $z_k$ , definido em (B.7) e  $\gamma \in \mathbb{C}$  um contorno suave com orientação definida e que englobe os resíduos.

É possível mostrar que para uma função meromorfa,  $f$ , com polos simples, a fórmula para o resíduo é dada por ([35], capítulo 1, equação 1.56):

$$\text{res}_{z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \quad (4.14)$$

sendo  $z_0$  o polo de  $f$ ,  $p$  e  $q$  funções holomorfas em uma vizinhança de  $z_0$ .

Para verificar isto, é suficiente notar que as funções meromorfas no plano complexo estendido são funções racionais, com denominador e numerador holomorfos ([109], capítulo 3, Teorema 3.4) e lembrar que  $z_0$  é um zero do denominador.

Através de uma definição para o contorno de integração que evite os polos da função (4.11) e preserve o caráter físico das grandezas [124], os resíduos podem ser avaliados pela equação (4.14) ao se derivar o denominador de (4.11) em função do argumento:

$$\frac{dJ'_m(\alpha_G(\sigma)R)}{d\sigma} = \frac{dJ'_m(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = R \left[ \frac{dJ'_m(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right] \left( \frac{d\alpha_G(\sigma)}{d\sigma} \right) \quad (4.15)$$

Utilizam-se as seguintes relações de recorrência [108]:

$$\frac{dJ_m(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \begin{cases} J_{m-1}(\varepsilon) - \frac{m}{\varepsilon} J_m(\varepsilon) \\ -J_{m+1}(\varepsilon) + \frac{m}{\varepsilon} J_m(\varepsilon) \end{cases} \quad (4.16)$$

Nota-se que  $\frac{dJ_m(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$ , em  $\sigma = \sigma_{mn}$ , fornecendo:

$$J_{m-1}(\varepsilon_{mn}) = \frac{m}{\varepsilon_{mn}} J_m(\varepsilon_{mn}) = J_{m+1}(\varepsilon_{mn}) \quad (4.17)$$

Logo, através da aplicação sucessiva de (4.16), tem-se:

$$\left. \frac{dJ'_m(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_{mn}} = \left( -1 + \frac{m^2}{\varepsilon_{mn}^2} \right) J_m(\varepsilon_{mn}) \quad (4.18)$$

sendo  $\varepsilon_{mn} = \alpha_{Gmn} R$ . Os detalhes da aplicação de (4.16) para a obtenção de (4.18) são dados no Apêndice C.

Assim, ao substituir a equação (4.18) na equação (4.15), tem-se:

$$\frac{dJ'_m(\alpha_G(\sigma)R)}{d\sigma} = R \left[ \left( -1 + \frac{m^2}{\varepsilon_{mn}^2} \right) J_m(\varepsilon_{mn}) \right] \left( \frac{d\alpha_G(\sigma)}{d\sigma} \right) \Big|_{\sigma=\sigma_{mn}} \quad (4.19)$$

O último termo da equação (4.19) pode ser descrito como:

$$\frac{d\alpha_G(\sigma)}{d\sigma} = \frac{d(U(\sigma))^{1/2}}{d\sigma} = \frac{1}{2\alpha_G} \frac{dU(\sigma)}{d\sigma} \quad (4.20)$$

com  $U(\sigma) = \alpha_G^2$ .

É possível mostrar que:

$$\frac{d\alpha_G(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{2\alpha_G} \frac{dU(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{2\alpha_G} \left[ \frac{A}{\chi(\sigma)} - \frac{B}{\chi(\sigma)^2} \frac{d\chi(\sigma)}{d\sigma} \right] \quad (4.21)$$

com  $\chi$ ,  $A$  e  $B$  dados por:

$$A = [2(\sigma M^2 - Mk) - 2(\sigma + 2\sigma^3\tau_{s*}^2 M^2 - 3\sigma^2 M k \tau_{s*}^2 + \sigma \tau_{s*}^2 k^2) + i\tau_{s*}(3\sigma^2 M^3 - 6\sigma M^2 k + 3Mk^2)] \quad (4.22)$$

$$B = [1 - \sigma^2 - \sigma^2 \tau_{s*}^2 + i\tau_{s*}(\sigma M - k)](\sigma M - k)^2 \quad (4.23)$$

$$\chi(\sigma) = [1 + \tau_{s*}^2(\sigma M - k)^2] \quad (4.24)$$

Usando a equação (B.10), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_m(r, \sigma) e^{-i\sigma(z-z_0)} d\sigma = \\ & 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{-J_m(\alpha_{Gmn} r_0) J_m(\alpha_{Gmn} r) Y'_m(\alpha_{Gmn} R)}{8\pi} \right] \left( \frac{dJ'_m(\alpha_{Gmn} R)}{d\sigma} \right)^{-1} e^{-i\sigma_{mn}(z-z_0)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Para o Wronskiano das funções de Bessel, de primeiro e segundo tipo, em  $\sigma = \sigma_{mn}$ , tem-se:

$$J_m(\alpha_{Gmn} R) Y'_m(\alpha_{Gmn} R) - Y_m(\alpha_{Gmn} R) J'_m(\alpha_{Gmn} R) = \frac{2}{\pi \alpha_{Gmn} R} \quad (4.26)$$

Utilizando o fato de que  $\alpha_{Gmn}$  é um zero de  $J'_m(\alpha_G R)$ , conforme (4.17), obtém-se:

$$Y'_m(\alpha_{Gmn}R) = \frac{1}{J_m(\alpha_{Gmn}R)} \left[ \frac{2}{\pi \alpha_{Gmn}R} \right] \quad (4.27)$$

Substituindo (4.27) em (4.25), vem:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_m(r, \sigma) e^{-i\sigma(z-z_0)} d\sigma \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i R} \left[ \frac{J_m(\alpha_{Gmn}r_0)J_m(\alpha_{Gmn}r)}{J_m(\alpha_{Gmn}R)\alpha_{Gmn}} \right] \left( \frac{dJ'_m(\alpha_{Gmn}R)}{d\sigma} \right)^{-1} e^{-i\sigma_{mn}(z-z_0)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Substituindo a equação (4.28) na equação (4.4), resulta:

$$G_m(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2\pi i R^2} \left[ \frac{J_m(\alpha_{Gmn}r_0)J_m(\alpha_{Gmn}r)}{J_m^2(\alpha_{Gmn}R) \left( 1 - \frac{m^2}{\alpha_{Gmn}^2 R^2} \right) \Psi} \right] e^{-i\sigma_{mn}(z-z_0)} \quad (4.29)$$

sendo  $\Psi \equiv \frac{1}{2} \frac{dU(\sigma)}{d\sigma}$  em  $\sigma = \sigma_{mn}$ .

### 4.1.3 Contorno de integração

O contorno de integração é tal que evita os polos da função do integrando [124]. Os zeros da derivada da função de Bessel de primeiro tipo são os polos e, portanto, a distribuição e características destes zeros deve ser analisada.

A distribuição dos zeros da função de Bessel de primeiro tipo é discutida detalhadamente por GRAY *et al.* [106](capítulo V) e WATSON [105](capítulo XV), sendo bem estabelecido que a função  $J_m(z)$ , para  $m \in \mathbb{Z}$ , não tem zeros complexos, e tem uma quantidade infinita de zeros reais, simetricamente distribuídos em relação ao ponto  $z = 0$  ([107], capítulo 5, seção 5.13, Teorema 1). Deste modo, o contorno de integração deve se estender, no limite, ao infinito, conforme Teorema B.8:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{C \rightarrow \infty} \int_{-C}^C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}_{z_k} f. \quad (4.30)$$

sendo  $C$  e  $-C$  os pontos de chegada e de início do contorno.

O contorno, representado na Figura 4.1, engloba os resíduos no sentido anti-horário e o fechamento também é no sentido anti-horário, ambos, portanto, com orientação positiva.

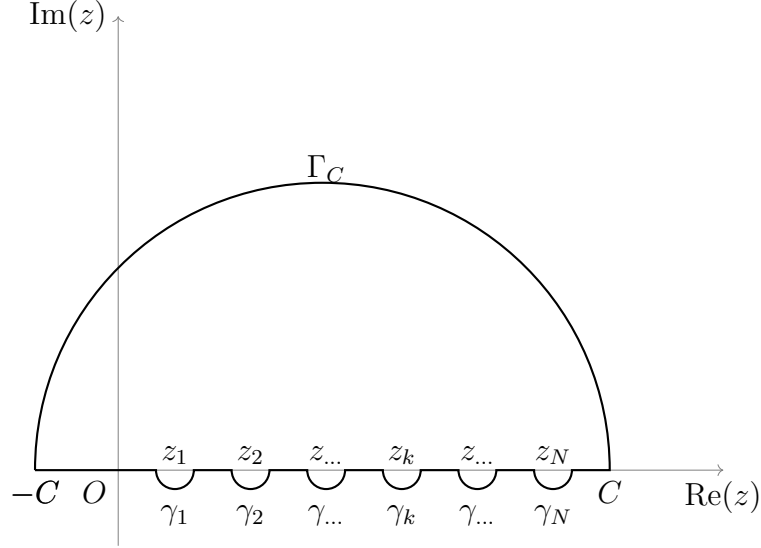


Figura 4.1: Contorno de integração.

Na Figura 4.1 o contorno é deformado no caminho dos polos, estratégia equivalente a deslocar os polos para o plano complexo adicionando uma quantidade  $i\epsilon$  aos polos  $z_k$ , com  $\epsilon \rightarrow 0$ . O deslocamento dos polos do eixo real é artifício usado frequentemente, como estratégia de integração, por RIENSTRA e TESTER [39] e BRAMBLEY [21]. Uma análise das diversas estratégias e contornos de integração, no caso de integrais impróprias, também pode ser encontrada no trabalho de COUTO [124].

A expressão do contorno é dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = [-C, z_1 - \epsilon] \cup [z_1 + \epsilon, z_2 - \epsilon] \cup [z_2 + \epsilon, z_3 - \epsilon] \cup \\ \cdots [z_k + \epsilon, z_{k+1} - \epsilon] \cup \cdots [z_N + \epsilon, C] \cup \gamma_1 \cup \cdots \gamma_k \cup \cdots \gamma_N \cup \Gamma_C \end{aligned} \quad (4.31)$$

sendo  $\tilde{\Gamma}$  o caminho,  $z_k$  os polos e  $\epsilon$  o raio dos arcos  $\gamma_k$ .

Ao substituir a equação (4.29) em (4.4), tem-se a expressão para a função de Green, dada por:

$$\begin{aligned} G(r, \theta, z; r_0, \theta_0, z_0) = \\ \left( \frac{-1}{2\pi i R^2} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{J_m(\alpha_{Gmn} r_0) J_m(\alpha_{Gmn} r)}{J_m^2(\alpha_{Gmn} R) \left( 1 - \frac{m^2}{\alpha_{Gmn}^2 R^2} \right) \Psi} \right] e^{-im(\theta - \theta_0)} e^{-i\sigma_{mn}(z - z_0)} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.32)$$

A equação para a função de Green (4.32) retoma formulações conhecidas para o caso invíscido, dadas por RIENSTRA e TESTER [39]. Para isto, tem-se raio unitário e  $\mu = \mu_b = 0$  ([39], equações 20 e 31). Destaca-se que a equação possui as mesmas características de simetria nos sentidos horário e anti-horário circunferencial, destacadas por RIENSTRA e TESTER [39].

# Capítulo 5

## Campo de velocidade

Neste capítulo, são obtidas as equações do campo de velocidade, considerando-se as hipóteses de escoamento médio axial uniforme e isentrópico, viscosidade de expansão e dinâmica, além de densidade médias uniforme. É considerada a decomposição em coordenadas cilíndricas, com dependência radial para cada componente, resultando em uma equação diferencial de Bessel para cada coordenada cilíndrica, radial, azimutal e axial,  $(r, \theta, z)$ . A equação diferencial para a componente axial do campo de velocidade é resolvida e relações assintóticas da solução são discutidas.

### 5.1 Equações para o campo de velocidade

Utiliza-se a seguinte decomposição do campo de velocidade nas componentes cilíndricas,  $(r, \theta, z)$ , dada por [19]:

$$\mathbf{u}' = [u'_r(r)\mathbf{e}_r + u'_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + u'_z(r)\mathbf{e}_z] e^{-im\theta} e^{-ik_z z} e^{i\omega t} \quad (5.1)$$

A utilização de coordenadas cilíndricas na equação (3.4) resulta em três equações diferenciais para as componentes da flutuação de velocidade, dadas por:

$$\rho_0 \frac{D_0 u'_r}{Dt} - \mu \left( \nabla^2 u'_r - \frac{u'_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right) = - \left[ \frac{\partial p'}{\partial r} + \psi_s \frac{D_0}{Dt} \left( \frac{\partial p'}{\partial r} \right) \right] \quad (5.2)$$

$$\rho_0 \frac{D_0 u'_\theta}{Dt} - \mu \left( \nabla^2 u'_\theta - \frac{u'_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \right) = - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \psi_s \frac{1}{r} \frac{D_0}{Dt} \left( \frac{\partial p'}{\partial \theta} \right) \right] \quad (5.3)$$

$$\rho_0 \frac{D_0 u'_z}{Dt} - \mu (\nabla^2 u'_z) = - \left[ \frac{\partial p'}{\partial z} + \psi_s \frac{D_0}{Dt} \left( \frac{\partial p'}{\partial z} \right) \right] \quad (5.4)$$

sendo  $\psi_s$  definido por:



$$\psi_s \equiv \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left( \frac{\mu}{3} + \mu_b \right) \quad (5.5)$$

Através das decomposições (3.12) e (5.1), chega-se às seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u'_r(r)}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial u'_r(r)}{\partial r} + \left[ \rho_0 i (U_0 k_z - \omega) - \mu \left( \frac{m^2}{r^2} + k_z^2 + \frac{1}{r^2} \right) \right] u'_r(r) = \\ [1 + \psi_s i (\omega - U_0 k_z)] \frac{\partial p_r(r)}{\partial r} - \frac{2im\mu}{r^2} u'_\theta(r) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u'_\theta(r)}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta(r)}{\partial r} + \left[ \rho_0 i (U_0 k_z - \omega) - \mu \left( \frac{m^2}{r^2} + k_z^2 + \frac{1}{r^2} \right) \right] u'_\theta(r) = \\ \left[ -i \frac{m}{r} + \psi_s (\omega - U_0 k_z) \frac{m}{r} \right] p_r(r) \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u'_z(r)}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial u'_z(r)}{\partial r} + \left[ \rho_0 i (U_0 k_z - \omega) - \mu \left( \frac{m^2}{r^2} + k_z^2 \right) \right] u'_z(r) = \\ [-ik_z + \psi_s (\omega - U_0 k_z)] p_r(r) \end{aligned} \quad (5.8)$$

As equações, (5.6), (5.7) e (5.8) reduzem-se às formulações conhecidas para o caso invíscido, dadas por RIENSTRA ([19], capítulo 3, equação 36). Para isso, faz-se  $\mu = \mu_b = 0$ , obtendo-se:

$$u'_r(r) = \frac{1}{\rho_0 i (U_0 k_z - \omega)} \frac{\partial p_r(r)}{\partial r} \quad (5.9)$$

$$u'_\theta(r) = -\frac{m}{\rho_0 r (U_0 k_z - \omega)} p_r(r) \quad (5.10)$$

$$u'_z(r) = -\frac{k_z}{\rho_0 (U_0 k_z - \omega)} p_r(r) \quad (5.11)$$

Destaca-se que a equação na componente radial, (5.6), apresenta acoplamento com a componente azimutal,  $u'_\theta(r)$ . Este acoplamento pode ser observado no trabalho de KHAMIS e BRAMBLEY [27], no qual é realizada a resolução numérica das equações linearizadas de momento linear, mas não é observada na resolução do campo acústico obtida por DOKUMACI [26].

## 5.2 Solução da equação para o campo de velocidade axial

A componente axial do campo de flutuação de velocidade é então obtida através da solução da equação (5.8) como:

$$u'_z(r) = u'_{zh}(r) + u'_{zp}(r) \quad (5.12)$$

sendo  $u'_{zh}(r)$  e  $u'_{zp}(r)$  as soluções homogênea e particular.

A equação diferencial na direção axial, (5.8), pode ser colocada na seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u'_z(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_z(r)}{\partial r} + \left[ \alpha_z^2 - \left( \frac{m^2}{r^2} \right) \right] u'_z(r) = \beta p_r(r) \quad (5.13)$$

sendo  $\alpha_z$  e  $\beta$  dados por:

$$\alpha_z^2 \equiv \frac{\rho_0 i (U_0 k_z - \omega)}{\mu} - k_z^2 \quad (5.14)$$

$$\beta \equiv \frac{[-ik_z + \psi_s(\omega - U_0 k_z)]}{\mu} \quad (5.15)$$

O método de variação de parâmetros fornece o seguinte resultado para a solução particular de (5.13):

$$u'_{zp}(\alpha_z r) = \left[ \int_0^r \frac{-Y_m(\alpha_z \varepsilon) \beta p_r(\varepsilon) d\varepsilon}{\alpha_z W(J_m(\alpha_z \varepsilon), Y_m(\alpha_z \varepsilon))} \right] J_m(\alpha_z r) + \left[ \int_0^r \frac{J_m(\alpha_z \varepsilon) \beta p_r(\varepsilon) d\varepsilon}{\alpha_z W(J_m(\alpha_z \varepsilon), Y_m(\alpha_z \varepsilon))} \right] Y_m(\alpha_z r) \quad (5.16)$$

sendo  $\varepsilon$  uma variável de integração e  $W$  o Wronskiano, dado por:

$$W(J_m(\alpha_z \varepsilon), Y_m(\alpha_z \varepsilon)) = \frac{2}{\pi \alpha_z \varepsilon} \quad (5.17)$$

fornecendo:

$$u'_{zp}(\alpha_z r) = \left[ -\frac{\pi\beta}{2} \int_0^r Y_m(\alpha_z \varepsilon) p_r(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \right] J_m(\alpha_z r) + \left[ \frac{\pi\beta}{2} \int_0^r J_m(\alpha_z \varepsilon) p_r(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \right] Y_m(\alpha_z r) \quad (5.18)$$

A expressão para  $p_r(\varepsilon)$  vem da equação (3.49), omitindo os somatórios e a propagação no sentido negativo do domínio:

$$p_r(\varepsilon) = \Lambda_{mn} A_{mn} J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \quad (5.19)$$

Ao substituir (5.19) na equação (5.18), tem-se:

$$u'_{zp}(\alpha_z r) = \left[ -\frac{\pi\beta}{2} A_{mn} \Lambda_{mn} \int_0^r Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \right] J_m(\alpha_z r) + \left[ \frac{\pi\beta}{2} A_{mn} \Lambda_{mn} \int_0^r J_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \right] Y_m(\alpha_z r) \quad (5.20)$$

A relação de ortogonalidade, entre funções de Bessel de primeiro tipo, com  $\alpha_z \neq \alpha_{mn}$ , é dada por ([106], capítulo 6, equação 108):

$$\int_0^\xi J_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = 0 \quad (5.21)$$

sendo a relação de ortogonalidade válida desde que:

$$\alpha_{mn} J'_m(\alpha_{mn} \xi) J_m(\alpha_z \xi) - J'_m(\alpha_z \xi) J_m(\alpha_{mn} \xi) \alpha_z = 0 \quad (5.22)$$

Deste modo, analisa-se o último termo da expressão em (5.20), ao considerar inicialmente que a relação de ortogonalidade seja válida, obtendo-se:

$$u'_{zp}(\alpha_z r) = \left[ -\frac{\pi\beta}{2} A_{mn} \Lambda_{mn} \int_0^r Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \right] J_m(\alpha_z r) \quad (5.23)$$

A forma indefinida da integral envolvendo produtos de funções de Bessel de primeiro e segundo tipo em (5.23) é dada pela igualdade ([125], capítulo 10, equação 10.22.4):

$$\int Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \frac{\varepsilon [\alpha_z Y_{m+1}(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) - \alpha_{mn} Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_{m+1}(\alpha_{mn} \varepsilon)]}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \quad (5.24)$$

Considerando os limites de integração da equação (5.23), tem-se:

$$\int_0^r Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \frac{r [\alpha_z Y_{m+1}(\alpha_z r) J_m(\alpha_{mn} r) - \alpha_{mn} Y_m(\alpha_z r) J_{m+1}(\alpha_{mn} r)]}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} - \frac{\varepsilon [\alpha_z Y_{m+1}(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) - \alpha_{mn} Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_{m+1}(\alpha_{mn} \varepsilon)]}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} \quad (5.25)$$

O último termo da equação (5.25) pode ser avaliado ao se considerar o comportamento assintótico das funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , através das seguintes relações ([125], capítulo 10, equações 10.7.3 e 10.7.4):

$$J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \sim \frac{1}{m!} \left( \frac{\alpha_{mn} \varepsilon}{2} \right)^m \quad (5.26)$$

$$Y_m(\alpha_z \varepsilon) \sim -\frac{(m-1)}{\pi} \left( \frac{\alpha_z \varepsilon}{2} \right)^{-m} \quad (5.27)$$

sendo  $m$  um inteiro positivo.

Ao substituir as equações (5.26) e (5.27) no último termo do lado direito da equação (5.25) e tomar o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tem-se:

$$\int_0^r Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \frac{r [\alpha_z Y_{m+1}(\alpha_z r) J_m(\alpha_{mn} r) - \alpha_{mn} Y_m(\alpha_z r) J_{m+1}(\alpha_{mn} r)]}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\alpha_{mn}}{\alpha_z} \right)^m \frac{1}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \quad (5.28)$$

Para retirar os termos envolvendo funções de Bessel de ordens diferentes, no primeiro termo do lado direito da equação (5.28), pode-se utilizar as relações de recorrência, dadas por:

$$Y_{m+1}(\alpha_z r) = \frac{m}{\alpha_z r} Y_m(\alpha_z r) - Y'_m(\alpha_z r) \quad (5.29)$$

$$J_{m+1}(\alpha_{mn} r) = \frac{m}{\alpha_{mn} r} J_m(\alpha_{mn} r) - J'_m(\alpha_{mn} r) \quad (5.30)$$

obtendo-se:

$$\int_0^r Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \left( \frac{r}{\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2} \right) \left( \alpha_z \left[ \frac{m}{\alpha_z r} Y_m(\alpha_z r) - Y'_m(\alpha_z r) \right] J_m(\alpha_{mn} r) \right. \\ \left. - \alpha_{mn} \left[ \frac{m}{\alpha_{mn} r} J_m(\alpha_{mn} r) - J'_m(\alpha_{mn} r) \right] Y_m(\alpha_z r) \right) + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\alpha_{mn}}{\alpha_z} \right)^m \frac{1}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \quad (5.31)$$

Do mesmo modo, para remover os termos contendo a derivada da função de Bessel de segundo tipo, pode-se utilizar a expressão, obtida do Wronskiano  $W(J_m(\alpha_z r), Y_m(\alpha_z r))$ :

$$Y'_m(\alpha_z r) = \left[ \frac{2}{\pi \alpha_z r} + Y_m(\alpha_z r) J'_m(\alpha_z r) \right] \frac{1}{J_m(\alpha_z r)} \quad (5.32)$$

substituindo a equação (5.32) na equação (5.31), tem-se:

$$\int_0^r Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \left( \frac{r}{\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2} \right) \left( \left[ -\frac{J'_m(\alpha_z r)}{J_m(\alpha_z r)} J_m(\alpha_{mn} r) \alpha_z + \alpha_{mn} J'_m(\alpha_{mn} r) \right] Y_m(\alpha_z r) \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi r} \frac{J_m(\alpha_{mn} r)}{J_m(\alpha_z r)} \right) + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\alpha_{mn}}{\alpha_z} \right)^m \frac{1}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \quad (5.33)$$

Ao substituir (5.23) na equação (5.33) vem:

$$\left[ \int_0^r Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \right] J_m(\alpha_z r) = \left( \frac{r}{\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2} \right) \left( [-J'_m(\alpha_z r) J_m(\alpha_{mn} r) \alpha_z + \alpha_{mn} J'_m(\alpha_{mn} r) J_m(\alpha_z r)] Y_m(\alpha_z r) \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi r} J_m(\alpha_{mn} r) \right) + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\alpha_{mn}}{\alpha_z} \right)^m \frac{J_m(\alpha_z r)}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \quad (5.34)$$

Ao substituir as relações de recorrência para  $J'_m(\alpha_z r)$  e  $J'_m(\alpha_{mn} r)$ , utilizar as relações assintóticas (5.26) e (5.27) e tomar o limite quando  $r \rightarrow 0$ , verifica-se que o termo contendo  $Y_m(\alpha_z r)$  na equação (5.34) tende a zero. De fato, tem-se a seguinte relação:

$$[\alpha_z J_{m+1}(\alpha_z r) J_m(\alpha_{mn} r) - \alpha_{mn} J_{m+1}(\alpha_{mn} r) J_m(\alpha_z r)] Y_m(\alpha_z r) \rightarrow 0 \quad (5.35)$$

quando  $r \rightarrow 0$ .

Avalia-se a hipótese de o termo contendo  $Y_m(\alpha_z r)$  ser constante ou nulo investigando o comportamento assintótico para argumento tendendo ao infinito. Com efeito, ao considerar a validade da relação de ortogonalidade dada pela equação (5.21), tem-se ([106], capítulo 6, equação 108'):

$$\alpha_{mn} J'_m(\alpha_{mn} r) J_m(\alpha_z r) - J'_m(\alpha_z r) J_m(\alpha_{mn} r) \alpha_z = 0 \quad (5.36)$$

que finalmente fornece:

$$\left[ \int_0^r Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \right] J_m(\alpha_z r) = \left( \frac{r}{\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2} \right) \left( -\frac{2}{\pi r} J_m(\alpha_{mn} r) \right) + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\alpha_{mn}}{\alpha_z} \right)^m \frac{J_m(\alpha_z r)}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \quad (5.37)$$

Ao substituir a equação (5.37) e a equação (5.23) em (5.12), vem:

$$u'_z(\alpha_z r) = \eta J_m(\alpha_z r) - \frac{\beta A_{mn} \Lambda_{mn}}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \left[ \left( \frac{\alpha_{mn}}{\alpha_z} \right)^m J_m(\alpha_z r) - J_m(\alpha_{mn} r) \right] \quad (5.38)$$

sendo  $\eta$  uma constante dependente das condições de contorno.

De modo a explicitar os termos que multiplicam as funções de Bessel da solução, a equação (5.38) pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$u'_z(\alpha_z r) = \left( \left[ \eta - \frac{\beta A_{mn} \Lambda_{mn}}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \left( \frac{\alpha_{mn}}{\alpha_z} \right)^m \right] J_m(\alpha_z r) + \left[ \frac{\beta A_{mn} \Lambda_{mn}}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \right] J_m(\alpha_{mn} r) \right) \quad (5.39)$$

O resultado de (5.39) considera que o termo em (5.18), multiplicado pela função de Bessel de segundo tipo, se anula. De fato, verifica-se que desconsiderar esta hipótese não altera a forma da equação. Para ver isso, utiliza-se a forma indefinida do primeiro termo de (5.18), as relações de recorrência e os Wronskianos das funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, conforme utilizado em (5.23), obtendo-se, ao retirar o segundo termo do primeiro parênteses em (5.39), o caso especial abaixo:

$$u'_z(\alpha_z r) = \left( \eta J_m(\alpha_z r) + \left[ \frac{\beta A_{mn} \Lambda_{mn}}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \right] J_m(\alpha_{mn} r) \right) \quad (5.40)$$

A forma da equação dada por (5.39), omitindo somatórios e a dependência complexa em  $r$ ,  $z$ , e  $t$  permite que a solução seja comparada com solução similar dada por DOKUMACI [26]:

$$u'(\lambda r) = (\Gamma_A J_m(\lambda r) + \Gamma_B J_m(\alpha_1 r)) \quad (5.41)$$

sendo  $\Gamma_A$  e  $\Gamma_B$  termos dependentes dos parâmetros de propagação como número de onda, razão entre calores específicos, temperatura média, velocidade média e autovalores. O autovalor  $\alpha_1$  é equivalente ao termo  $\alpha_{mn}$  e é obtido através da solução da equação de dispersão dada por [26], enquanto o autovalor  $\lambda$  é equivalente ao termo  $\alpha_z$ .

Através da aplicação de condições de contorno a expressão para flutuação do campo de velocidade axial pode ser obtida.

### 5.2.1 Condição de contorno

Ao considerar a condição de contorno de não deslizamento na parede interna do duto, situação também adotada por DOKUMACI [26],  $u'_z(\alpha_z R) = 0$ , na equação (5.38) e omitir os somatórios em  $m$  e  $n$ , tem-se:

$$u'_z(\alpha_z r) = \frac{\pi \beta A_{mn} \Lambda_{mn}}{2} \left[ \eta(R) \frac{J_m(\alpha_z r)}{J_m(\alpha_z R)} - \left( \int_0^r Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \right) J_m(\alpha_z r) \right] \quad (5.42)$$

sendo  $\eta(R)$  dado por:

$$\eta(R) \equiv \left( \left[ \int_0^r Y_m(\alpha_z \varepsilon) J_m(\alpha_{mn} \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \right] J_m(\alpha_z r) \right) \Big|_{r=R} = \left[ \left( \frac{\alpha_{mn}}{\alpha_z} \right)^m J_m(\alpha_z R) - J_m(\alpha_{mn} R) \right] \frac{2}{\pi (\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \quad (5.43)$$

Finalmente, substituindo-se a equação (5.37) na equação (5.42), obtém-se:

$$u'_z(\alpha_z r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta A_{mn} \Lambda_{mn}}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \left[ \frac{J_m(\alpha_{mn} r) J_m(\alpha_z R) - J_m(\alpha_{mn} R) J_m(\alpha_z r)}{J_m(\alpha_z R)} \right] e^{-im\theta} e^{-ik_{zmn} z} e^{i\omega t} \quad (5.44)$$

Verifica-se que, ao tomar o limite invíscido do termo multiplicativo na equação (5.44), há uma redução ao termo conhecido dado pela equação (5.11):

$$\lim_{\mu \rightarrow 0, \mu_b \rightarrow 0} \left( \frac{\beta}{\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2} \right) = - \frac{k_z}{\rho_0 (U_0 k_z - \omega)} \quad (5.45)$$

Considerar o campo da flutuação de velocidade axial como fonte acústica é a abordagem utilizada por MUEHLEISEN [23] na utilização de acoplamento modal em geometrias de dutos retangulares. A expressão para a flutuação da velocidade axial pode então ser utilizada em conjunto com a função de Green, podendo representar uma fonte acústica para uma ramificação do duto principal. As características de direcionalidade são desconsideradas ao considerar a região fonte como acusticamente compacta.



## Capítulo 6

# Interação entre modos na junção

Neste capítulo, considera-se a existência de interação entre modos radiais acústicos de mesma frequência devido ao efeito de uma ramificação de um duto cilíndrico. Uma onda plana do duto principal com frequência definida, incidindo em uma ramificação cilíndrica, é modelada através de uma integral de convolução entre a função de Green da ramificação e a componente normal à ramificação da flutuação da velocidade axial do duto principal. A convolução é obtida no contexto de uma formulação integral do problema. Resultados qualitativos são obtidos a partir do comportamento do produto de funções de Bessel resultante. Mostra-se que há influência de um modo de onda plana do duto principal em modos superiores da ramificação. Os efeitos da viscosidade e do escoamento médio nesta interação são discutidos.

A geometria considerada é uma ramificação em T, caracterizada pela união de dois dutos em ângulo reto. O mecanismo de excitação acústica desta geometria é bastante estudado em um contexto experimental e numérico, sendo estabelecido que a formação de camadas cisalhantes e sua interação com o campo acústico é bastante importante em sistemas de tubulações [56, 88, 126, 127]. Busca-se estudar como os modos acústicos radiais podem interagir nesta geometria cilíndrica, de maneira analítica, a partir da utilização de funções de Green. Neste processo, negligencia-se a descrição detalhada do campo de vorticidade e turbulência na junção.

A abordagem deste capítulo é próxima da utilizada por MUEHLEISEN [23] e REDMORE e MULHOLLAND [22], para dutos retangulares e escoamentos invíscidos, e por POSSON e PEAKE [75] na investigação de fontes acústicas em turbomáquinas. Os resultados qualitativos de SALT *et al.* [88] sobre caracterização espacial das fontes na junção, obtidos a partir de experimentos e simulações computacionais, são utilizados.

## 6.1 Formulação integral

Nesta seção é obtida uma formulação integral, considerando o operador dado por (3.8). Para isso, multiplica-se a função de Green por  $\mathcal{F}_L(p'(\mathbf{x}, t)) = 0$ . Depois, multiplica-se  $p'$  por  $\mathcal{F}_L(G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ . Finalmente, ao subtrair o primeiro termo pelo segundo e integrar em um volume  $\Omega_0$ , obtém-se:

$$p'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c_0^2} \iiint_{\Omega_0} \left( p' \frac{D_0^2 G}{Dt^2} - G \frac{D_0^2 p'}{Dt^2} \right) d\mathbf{y}^3 + \iiint_{\Omega_0} (G \nabla^2 p' - p' \nabla^2 G) d\mathbf{y}^3 + \tau_s \iiint_{\Omega_0} \left( G \frac{D_0}{Dt} (\nabla^2 p') - p' \frac{D_0}{Dt} (\nabla^2 G) \right) d\mathbf{y}^3 \quad (6.1)$$

Em (6.1) tem-se uma parcela dos termos fonte devido ao escoamento médio e outra correspondendo à viscosidade. O primeiro termo do lado direito de (6.1) pode ser avaliado ao observar o seguinte resultado [71]:

$$\left( p' \frac{D_0^2 G}{Dt^2} - G \frac{D_0^2 p'}{Dt^2} \right) = \frac{D_0}{Dt} \left( p' \frac{D_0 G}{Dt} - G \frac{D_0 p'}{Dt} \right) \quad (6.2)$$

que aplicado ao primeiro termo do lado direito da equação (6.1) fornece:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_0} \frac{D_0}{Dt} \left( p' \frac{D_0 G}{Dt} - G \frac{D_0 p'}{Dt} \right) d\mathbf{y}^3 &= \iiint_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( p' \frac{D_0 G}{Dt} - G \frac{D_0 p'}{Dt} \right) d\mathbf{y}^3 + \\ &\iiint_{\Omega_0} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \left( p' \frac{\partial G}{\partial t} - G \frac{\partial p'}{\partial t} \right) d\mathbf{y}^3 + \iiint_{\Omega_0} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla G - G \mathbf{U}_0 \cdot \nabla p') d\mathbf{y}^3 \end{aligned} \quad (6.3)$$

No segundo termo do lado direito de (6.3) utiliza-se a seguir o Teorema de Transporte de Reynolds e integra-se em um intervalo de tempo  $[-T, T]$  [5], obtendo-se:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{0,t}} \frac{D_0}{Dt} \left( p' \frac{D_0 G}{Dt} - G \frac{D_0 p'}{Dt} \right) d\mathbf{y}^3 d\tau &= \iiint_{\Omega_{0,t}} \left( p' \frac{D_0 G}{Dt} - G \frac{D_0 p'}{Dt} \right) d\mathbf{y}^3 \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &- \iint_{\partial\Omega_{0,t}} \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{n} \left( p' \frac{D_0 G}{Dt} - G \frac{D_0 p'}{Dt} \right) dS d\tau + \iiint_{\Omega_{0,t}} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \left( p' \frac{\partial G}{\partial t} - G \frac{\partial p'}{\partial t} \right) d\mathbf{y}^3 d\tau \\ &+ \iiint_{\Omega_{0,t}} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla G - G \mathbf{U}_0 \cdot \nabla p') d\mathbf{y}^3 d\tau \end{aligned} \quad (6.4)$$

sendo  $\mathbf{U}_s$  a velocidade da superfície.

O terceiro termo do lado direito de (6.4) pode ser colocado da seguinte forma

[5]:

$$\iiint_{\Omega_{0,t}} \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \left( p' \frac{\partial G}{\partial t} - G \frac{\partial p'}{\partial t} \right) d\mathbf{y}^3 d\tau = \iint_{\partial\Omega_{0,t}} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \left( p' \frac{\partial G}{\partial t} - G \frac{\partial p'}{\partial t} \right) dS d\tau \quad (6.5)$$

Ao negligenciar o último termo do lado direito de (6.4), de ordem  $O(M^2)$ , considerar que a superfície seja estacionária,  $\mathbf{U}_s = 0$ , e impor condições de causalidade no primeiro e terceiro termo do lado direito de (6.4),  $G = 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e  $D_0 G / Dt = 0$  com  $t \rightarrow -\infty$ , tem-se:

$$\iiint_{\Omega_{0,t}} \left( p' \frac{D_0^2 G}{Dt^2} - G \frac{D_0^2 p'}{Dt^2} \right) d\mathbf{y}^3 d\tau = \iiint_{\Omega_{0,t}} \frac{D_0}{Dt} \left( p' \frac{D_0 G}{Dt} - G \frac{D_0 p'}{Dt} \right) d\mathbf{y}^3 d\tau \approx 0 \quad (6.6)$$

O último termo do lado direito da equação (6.1) é desprezado, correspondendo aos termos de viscosidade na superfície da ramificação, uma vez que busca-se a influência apenas do duto principal. Utiliza-se o Teorema de Gauss no segundo termo do lado direito de (6.1), obtendo-se:

$$\iiint_{\Omega_{0,t}} (G \nabla^2 p' - p' \nabla^2 G) d\mathbf{y}^3 d\tau = \iiint_{\Omega_{0,t}} \nabla \cdot (G \nabla p' - p' \nabla G) d\mathbf{y}^3 d\tau \quad (6.7)$$

$$= \iint_{\partial\Omega_{0,t}} (G \nabla p' - p' \nabla G) \cdot \mathbf{n} dS d\tau \quad (6.8)$$

Ao considerar que  $\nabla G \approx 0$  na região da junção, conforme abordagem de MU-EHLEISEN [23], obtém-se:

$$p'(\mathbf{x}, t) \approx \iint_{\partial\Omega_{0,t}} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \nabla p' \cdot \mathbf{n} dS d\tau \quad (6.9)$$

Ao utilizar a equação do momento, a flutuação da pressão na ramificação pode ser aproximada como:

$$p'(\mathbf{x}, t) \approx \iint_{\partial\Omega_{0,t}} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \rho i(\omega - U_0 k_z) \sin(\Theta) u'_z(\alpha_z r) dS d\tau \quad (6.10)$$

sendo  $S$  a superfície comum entre o duto principal e a ramificação e  $\Theta$  o ângulo instantâneo de deslocamento da componente axial de flutuação de velocidade, conforme caracterização experimental e numérica de SALT *et al.* [56]. A Figura 6.1 ilustra a composição da componente normal:

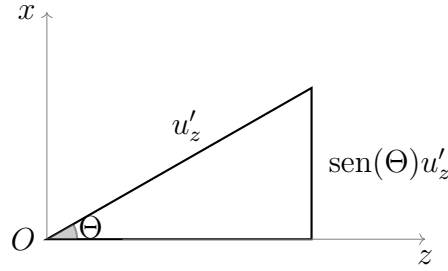


Figura 6.1: Componente normal da flutuação de velocidade axial na junção.

Como explicitado por SALT *et al.* [56], o ângulo  $0 \leq \Theta \leq \pi$  é uma função da posição na ramificação T. Sendo estabelecido que, no início da abertura da ramificação, o ângulo entre a velocidade do escoamento e a componente irrotacional de sua flutuação é desprezível, situação que muda na junção pela existência do fluxo de massa no sentido da ramificação. Esta descrição qualitativa da distribuição espacial das fontes aeroacústicas na junção é utilizada neste trabalho para permitir o relacionamento entre os modos de velocidade do duto principal com a função de Green da ramificação.

Destaca-se que a interseção entre os dois dutos circulares não é plana, mas uma superfície curva tipo sela em que a integração e descrição matemática é dificultada [24]. Este fato é analisado e discutido por KEEFE [24] e DUBOS *et al.* [25], que descrevem as aproximações mais utilizadas como função da razão entre os raios dos dutos. A situação limite de tomar a interseção como plana é tanto mais válida quanto menor a razão entre o raio da ramificação e o do duto principal [24, 25]. A descrição da superfície tipo sela na junção implica na necessidade de resolução numérica da área nesta região, estudada por DUBOS *et al.* [25].

## 6.2 Sistema de coordenadas

A determinação do sistema de coordenadas adequado é necessária para a obtenção dos resultados da flutuação de pressão na junção. No duto principal foram utilizadas as coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , enquanto na ramificação adotam-se as coordenadas  $(r^*, \phi, x)$ , abordagem semelhante ao do trabalho de KEEFE [24], para geometria circular. Considera-se que o raio interno da ramificação é menor que o raio do duto principal. A Figura 6.2 mostra a geometria considerada na ramificação:

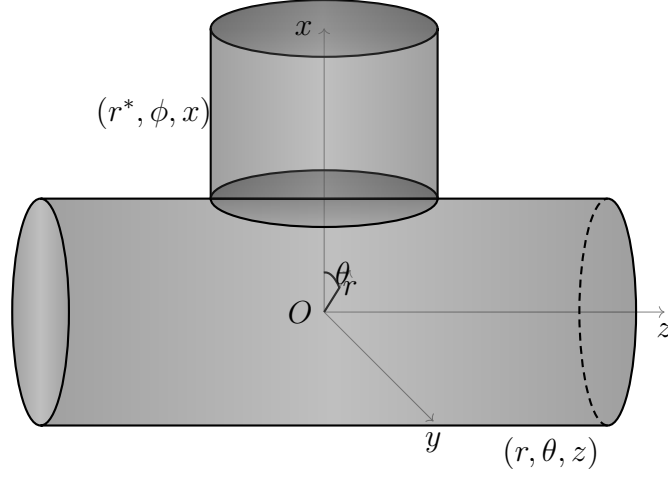


Figura 6.2: Geometria na ramificação.

A resolução numérica e a descrição da região de interseção é evitada ao estabelecer uma transformação de coordenadas que permita considerar os modos do duto principal nas coordenadas da ramificação. Deste modo, pode-se estabelecer resultados qualitativos através das relações de ortogonalidade radial das funções de Bessel de primeiro tipo. A utilização de um volume fictício na junção entre dois trechos de tubulação é artifício utilizado por ELDREDGE [104] na investigação da interação de modos acústicos em absorvedores de dutos cilíndricos e anulares.

Para o duto principal, tem-se as coordenadas  $(r, \theta, z)$ , resultando na equação (4.32), para a função de Green em um duto infinito. A função de Green do duto principal deve possibilitar o acoplamento na junção entre os dutos. Para isso, condições de continuidade da função de Green podem ser impostas na superfície de separação entre os dutos [24].

A função de Green na ramificação tem a mesma forma obtida na equação (4.32), mas para as coordenadas  $(r^*, \phi, x)$ , dada por:

$$G(r^*, \phi, x; r_0^*, \phi_0, x_0) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{2\pi i R_s^2} \right) \left[ \frac{J_p(\alpha_{Gpq} r_0^*) J_p(\alpha_{Gpq} r^*)}{J_p^2(\alpha_{Gpq} R_s) \left( 1 - \frac{p^2}{\alpha_{Gpq}^2 R_s^2} \right) \Psi_s} \right] e^{-ip(\phi-\phi_0)} e^{-i\sigma_{pq}(x-x_0)} e^{i\omega t} \quad (6.11)$$

sendo  $R_s$  o raio interno na ramificação,  $p$  e  $q$  índices dos modos e respectivos zeros e o termo  $\Psi_s \equiv \frac{1}{2} \frac{dU(\sigma)}{d\sigma}$ , definido conforme (4.21), nos pontos  $\sigma = \sigma_{pq}$ .

As coordenadas cilíndricas dos dois trechos devem ser relacionadas de modo a

permitir o estabelecimento da integral de convolução. Considera-se então a seguinte relação:

$$(r, \theta, z) = \left( \frac{\cos(\phi)}{\sin\left(\arctan\left(\frac{z}{x} \cot(\phi)\right)\right)} r^*, \arctan\left(\frac{z}{x} \cot(\phi)\right), z \right) \quad (6.12)$$

sendo  $0 \leq z \leq R_s$ ,  $0 < \phi < 2\pi$  e  $0 \leq r^* \leq R_s$ . A coordenada em  $z$  do eixo principal é delimitada pela dimensão do raio da ramificação. A expressão (6.12) pode ser verificada através da situação trigonométrica representada na Figura 6.3:

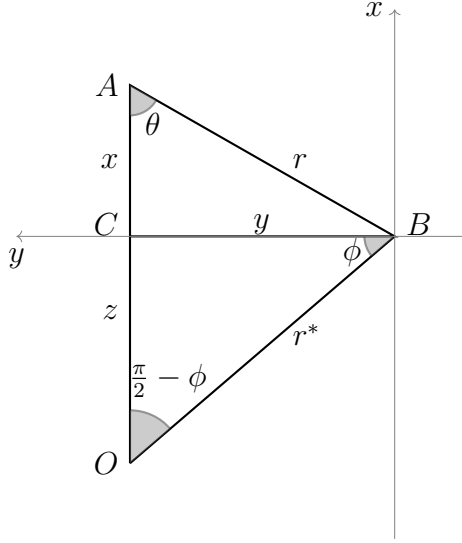


Figura 6.3: Triângulos de coordenadas.

A partir da expressão em (6.12) pode-se definir  $\mathcal{B}(\phi)$  por:

$$\mathcal{B}(\phi) \equiv \frac{\cos(\phi)}{\sin\left(\arctan\left(\frac{z}{x} \cot(\phi)\right)\right)} \quad (6.13)$$

A expressão trigonométrica no lado direito da desigualdade (6.13) estabelece condições de existência de soluções reais para  $\phi$ , os quais podem ser separadas nos casos  $\mathcal{B}(\phi) = 1$ ,  $\mathcal{B}(\phi) < 1$  e  $\mathcal{B}(\phi) > 1$ , dados abaixo:

$$\mathcal{B}(\phi) = 1 \quad (6.14)$$

com região de solução real [128]:

$$\left\{ \frac{z}{x} = 1, \quad \text{e} \quad 0 < \phi < \pi \right. \quad (6.15)$$

A primeira desigualdade pode então ser expressa por:

$$\mathcal{B}(\phi) < 1 \quad (6.16)$$

com região de solução real [128]:

$$\begin{cases} 0 < \frac{z}{x} < 1, & \text{e } \pi < \phi < 2\pi, \\ \frac{z}{x} > 1, & \text{e } 0 < \phi < 2\pi. \end{cases} \quad (6.17)$$

A segunda desigualdade é dada por:

$$\mathcal{B}(\phi) > 1 \quad (6.18)$$

com região de solução real [128]:

$$\begin{cases} 0 < \frac{z}{x} < 1, & \text{e } 0 < \phi < \pi, \\ \frac{z}{x} > 1, & \text{sem solução com } \phi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6.19)$$

A igualdade (6.14), junto com as desigualdades, (6.16) e (6.18), implicam restrições sobre os valores de  $\phi$ , sendo  $0 < \phi < 2\pi$  ou  $0 < \phi < \pi$ , conforme (6.17) e (6.19).

Na Figura 6.3, o triângulo  $\triangle OCB$  foi rebatido do plano  $zy$  para o plano  $xy$ , estabelecendo o lado comum  $CB$ . A rotação não altera as relações angulares e dimensões. Os triângulos  $\triangle OCB$  e  $\triangle CAB$  são obtidos a partir da consideração de uma coordenada cilíndrica no duto principal, projetada na coordenada da ramificação. O domínio de  $r$  é diferente de  $r^*$ , uma vez que os raios dos dutos não são necessariamente iguais. Com efeito, o raio da ramificação é considerado como menor que o raio do duto principal.

### 6.3 Interação entre modos de mesma frequência

A partir da relação entre os domínios cilíndricos dada por (6.12), a integral de convolução pode ser determinada. Em particular, estuda-se o comportamento do integrando como função dos modos incidentes do duto principal. Um modo incidente de onda plana do duto principal é então considerado e mostra-se que não é ortogonal aos modos de ordem superior na ramificação. Este resultado implica na excitação de modos de ordem superior pelo modo de onda plana.

Quando dois segmentos com diferentes propriedades são conectados, a expansão em modos para cada segmento pode ser utilizada e condições de continuidade podem ser estabelecidas para a expansão do campo resultante como função do incidente.

Cada modo é espalhado em um espectro modal refletido e transmitido [19].

Com o objetivo de investigar qualitativamente a possível interação entre modos dos dois trechos, a abordagem utilizada negligencia a transmissão e reflexão após a ramificação. Desconsiderar os campos refletidos e transmitidos, é abordagem utilizada por REDMORE e MULHOLLAND [22] para a determinação do campo acústico em uma ramificação de um duto de seção retangular. Deste modo, busca-se uma relação entre um modo de onda plana do duto principal,  $m = 0$  e  $n = 1$ , e um modo de ordem superior da ramificação,  $p > 0$  e  $q \geq 0$ . Esta relação qualitativa não necessita da descrição completa dos campos refletidos e transmitidos, que exigiriam métodos numéricos para sua determinação precisa, contudo permite que a relação qualitativa entre os modos seja analisada.

Em uma abordagem quantitativa, é necessário um formalismo matricial dos coeficientes de reflexão e transmissão na junção, com resolução numérica e truncamento de modos, assim como impor relações de continuidade de fluxo de massa na junção, conforme executado para uma situação invíscida, sem escoamento e bidimensional por MUEHLEISEN [23], ao estender o trabalho de REDMORE e MULHOLLAND [22].

Para investigar a interação, primeiro tem-se a determinação das variáveis de integração através das relações dadas por (6.12):

$$\alpha_{mn}^* = \alpha_{mn} \frac{\cos(\phi)}{\sin\left(\arctan\left(\frac{z}{x} \cot(\phi)\right)\right)} \quad (6.20)$$

$$\alpha_z^* = \alpha_z \frac{\cos(\phi)}{\sin\left(\arctan\left(\frac{z}{x} \cot(\phi)\right)\right)} \quad (6.21)$$

$$\theta^* = \arctan\left(\frac{z}{x} \cot(\phi)\right) \quad (6.22)$$

ao substituir as variáveis acima na equação (5.44), obtém-se a expressão:

$$u'_z(\alpha_z^* r^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta A_{mn} \Lambda_{mn}}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \left[ \frac{J_m(\alpha_{mn}^* r^*) J_m(\alpha_z R) - J_m(\alpha_{mn} R) J_m(\alpha_z^* r^*)}{J_m(\alpha_z R)} \right] e^{-im\theta^*} e^{-ik_{zmn} z} e^{i\omega t} \quad (6.23)$$

Ao substituir (6.23) e (6.11) na equação (6.10), tem-se:



$$\begin{aligned}
p'(\mathbf{x}, t) = & \iint_{\partial\Omega_0, t} \left[ \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{2\pi i R_s^2} \right) \frac{J_p(\alpha_{Gpq} r_0^*) J_p(\alpha_{Gpq} r^*)}{J_p^2(\alpha_{Gpq} R_s) \left( 1 - \frac{p^2}{\alpha_{Gpq}^2 R_s^2} \right) \Psi_s} \right] e^{-ip(\phi-\phi_0)} e^{-i\sigma_{pq}(x-x_0)} e^{i\omega(t-\tau_0)} \times \\
& \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta A_{mn} \Lambda_{mn}}{(\alpha_z^2 - \alpha_{mn}^2)} \left[ \frac{J_m(\alpha_{mn}^* r_0^*) J_m(\alpha_z R) - J_m(\alpha_{mn} R) J_m(\alpha_z^* r_0^*)}{J_m(\alpha_z R)} \right] e^{-im\theta^*} e^{-ik_{zmn} z} e^{i\omega\tau_0} \\
& \times \rho i(\omega - U_0 k_z) \text{sen}(\Theta) r_0^* d\phi_0 dr_0^* d\tau_0. \quad (6.24)
\end{aligned}$$

A interação entre os modos,  $p$  e  $m$ , na equação (6.24) pode ser investigada ao se fixar um modo do duto principal e da ramificação. Como os modos  $p$  e  $m$  estão fixos, há uma interação na variável de integração radial contendo:

$$\int_0^{R_s} J_p(\alpha_{Gpq} r_0^*) J_m(\alpha_z^* r_0^*) r_0^* dr_0^* \quad (6.25)$$

Esta integral do produto de funções de Bessel de primeiro tipo e ordem arbitrária, com argumentos não necessariamente iguais, estabelece uma interação entre os modos radiais. A integral (6.25) pode satisfazer a condição de ortogonalidade quando as ordens são iguais,  $m = p$ , e os autovalores diferentes  $\alpha_{Gpq} \neq \mathcal{B}(\phi)\alpha_z$ .

Destaca-se que os modos azimutais de ordens diferentes em um mesmo domínio, ou duto, com condição de parede rígida, são ortogonais. Contudo, em uma descontinuidade do domínio, ocorre uma quebra de simetria azimutal, podendo acarretar a geração de modos azimutais não ortogonais, conforme pode ser observado no trabalho de BAUERHEIM *et al.* [129].

No caso da interação entre uma onda plana e um modo superior, na ramificação a relação de ortogonalidade radial não é satisfeita. Em particular, seja um modo superior da ramificação,  $p > 1$  e  $q$  fixos, e um modo de onda plana do duto principal,  $m = 0$  e  $n = 1$ , omitindo-se os termos multiplicativos e ao substituir  $\alpha_{01} = 0$  e  $J_0(0) = 1$  ([19], apêndice A) na equação (6.24), tem-se:

$$\int_0^{R_s} J_p(\alpha_{Gpq} r_0^*) \left[ 1 - \frac{J_0(\alpha_z^* r_0^*)}{J_0(\alpha_z R)} \right] r_0^* dr_0^* \quad (6.26)$$

A integral em (6.26) pode ter sua solução avaliada ao seguir abordagem dada por POCHERNYAEV [130]. Para isso, verifica-se a seguinte expressão ([105], capítulo V, seção 5.41, equação 2):

$$J_p(\alpha_{Gpq}r_0^*)J_m(\alpha_z^*r_0^*) = \left(\frac{\alpha_{Gpq}r_0^*}{2}\right)^p \left(\frac{\alpha_z^*r_0^*}{2}\right)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)} \times \\ \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{\alpha_{Gpq}r_0^*}{2}\right)^{2\lambda} {}_2F_1(-\lambda, -p-\lambda; m+1; \left(\frac{\alpha_z^*}{\alpha_{Gpq}}\right)^2)}{\lambda! \Gamma(p+\lambda+1)} \right] \quad (6.27)$$

sendo  $\Gamma$  a função gama e  ${}_2F_1$  a função hipergeométrica de Gauss. Resultados recentes sobre funções hipergeométricas e suas aplicações podem ser encontrados nos trabalhos de BARICZ [131] e BEUKERS [132].

A equação (6.27) expressa o produto de duas funções de Bessel através de uma única função hipergeométrica. A função hipergeométrica modificada  ${}_2\mathbf{F}_1^*$ , pode ser utilizada para absorver a função gama, facilitando a determinação analítica da integral, sendo definida por ([125], capítulo 15, equação 15.1.2):

$${}_2\mathbf{F}_1^* \left( -\lambda, -p-\lambda; m+1; \left(\frac{\alpha_z^*}{\alpha_{Gpq}}\right)^2 \right) \equiv \frac{{}_2F_1 \left( -\lambda, -p-\lambda; m+1; \left(\frac{\alpha_z^*}{\alpha_{Gpq}}\right)^2 \right)}{\Gamma(m+1)} \quad (6.28)$$

sendo inteira no seu ramo principal,  $1 \rightarrow +\infty$ , e nos outros ramos, com a exclusão dos pontos  $\left(\frac{\alpha_z^*}{\alpha_{Gpq}}\right)^2 = 0, 1$  e  $\infty$  ([125], capítulo 15).

Ao substituir a função (6.28) em (6.27), tem-se:

$$J_p(\alpha_{Gpq}r_0^*)J_m(\alpha_z^*r_0^*) = \left(\frac{\alpha_{Gpq}r_0^*}{2}\right)^p \left(\frac{\alpha_z^*r_0^*}{2}\right)^m \times \\ \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{\alpha_{Gpq}r_0^*}{2}\right)^{2\lambda} {}_2\mathbf{F}_1^*(-\lambda, -p-\lambda; m+1; \left(\frac{\alpha_z^*}{\alpha_{Gpq}}\right)^2)}{\lambda! \Gamma(p+\lambda+1)} \right] \quad (6.29)$$

Substitue-se a equação (6.29) na integral (6.26), tendo como integrando, portanto, uma função hipergeométrica modificada:

$$\int_0^{R_s} J_p(\alpha_{Gpq} r_0^*) J_m(\alpha_z^* r_0^*) r_0^* dr_0^* = \int_0^{R_s} \left( \frac{\alpha_{Gpq}}{2} \right)^p \left( \frac{\alpha_z^*}{2} \right)^m \times \\ \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^\lambda \left( \frac{\alpha_{Gpq}}{2} \right)^{2\lambda} {}_2F_1^*(-\lambda, -p-\lambda; m+1; \left( \frac{\alpha_z^*}{\alpha_{Gpq}} \right)^2)}{\lambda! \Gamma(p+\lambda+1)} \right] (r_0^*)^{p+m+2\lambda+1} dr_0^* \quad (6.30)$$

Pode-se obter então uma solução analítica desta integral, em um intervalo finito, ao garantir que o integrando seja uniformemente convergente. Para isso, considera-se a estimativa para o limite superior de uma forma da função (6.37) dada por ([105], capítulo III, seção 3.31, equação 1):

$$|J_m(z)| \leq \frac{|z^m|}{2^m \Gamma(m+1)} \leq \frac{|z^m| e^{|I(z)|}}{2^m \Gamma(m+1)} \quad (6.31)$$

sendo  $I(z)$  uma função do argumento e  $m \in \mathbb{Z}$ . Ao aplicar a segunda desigualdade de (6.31) no integrando do lado esquerdo de (6.30), obtém-se:

$$|J_p(\alpha_{Gpq} r_0^*)| |J_0(\alpha_z^* r_0^*)| r_0^* \leq \frac{|\alpha_{Gpq}^p| r_0^{*p+1}}{2^p \Gamma(p+1)} \quad (6.32)$$

sendo  $p \in \mathbb{Z}$ .

Com a desigualdade (6.32) pode-se obter um resultado mais restrito, ao tomar o limite  $p \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{Gpq}^p| r_0^{*p+1}}{2^p \Gamma(p+1)} = 0 \quad (6.33)$$

que pode ser colocado da seguinte forma:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup (|J_p(\alpha_{Gpq} r_0^*)| |J_0(\alpha_z^* r_0^*)| r_0^*) = 0 \quad (6.34)$$

Este resultado é condizente com a diminuição da influência do modo de onda plana, do duto principal, nos modos de ordem superior da ramificação. Em particular, este resultado também indica que o integrando em (6.30), de fato, apresenta convergência uniforme ([133], capítulo 7) e permite que a seguinte propriedade seja utilizada:

$$\int_a^b \sum_n f_n(x) dx = \sum_n \int_a^b f_n(x) dx \quad (6.35)$$

sendo  $f_n$  termos de uma sequência genérica uniformemente convergente em um intervalo finito  $[a, b]$ .

Com a convergência uniforme e a utilização da propriedade das integrais de séries uniformemente convergentes em um intervalo fechado, dada por (6.35), obtém-se para (6.30):

$$\int_0^{R_s} J_p(\alpha_{Gpq} r_0^*) J_m(\alpha_z^* r_0^*) r_0^* dr_0^* = \left(\frac{\alpha_{Gpq}}{2}\right)^p \left(\frac{\alpha_z^*}{2}\right)^m \times \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{\alpha_{Gpq}}{2}\right)^{2\lambda} {}_2F_1^*(-\lambda, -p-\lambda; m+1; \left(\frac{\alpha_z^*}{\alpha_{Gpq}}\right)^2)}{\lambda! \Gamma(p+\lambda+1)} \right] \frac{(R_s)^{p+m+2\lambda+2}}{(p+m+2\lambda+2)} \quad (6.36)$$

Este resultado advém das propriedades das funções hipergeométricas. De fato, devido às suas propriedades analíticas, é geralmente válido tomar limites para os diferentes parâmetros da função [125]. Através do comportamento de (6.36), para  $p \gg 1$ , observa-se uma influência cada vez menor do modo de onda plana. Esta constatação é mostrada na seção seguinte, com os gráficos de (6.36) para diferentes valores de  $p$ .

Destaca-se que a obtenção numérica da função hipergeométrica é um problema importante devido à sua grande variedade de aplicações em problemas matemáticos e físicos. Contudo, a solução numérica se apresenta como uma tarefa extremamente difícil, pela existência de erros de arredondamento e cancelamento para certos valores dos parâmetros e variável, como pode ser observado no trabalho de PEARSON [134].

A interação entre modos acústicos radiais de ordens diferentes, mostrada na ramificação cilíndrica a 90 graus, corrobora a afirmação de REDMORE e MULHOLLAND [22] de que, potencialmente, modos superiores possam ser excitados pelo modo de onda plana na ramificação.

A questão levantada através de resultados experimentais por NISHIGUCHI *et al.* [9], de que vibrações de origem acústica e do escoamento estejam interligadas em descontinuidades geométricas caracterizadas por ramificações, também é respondida afirmativamente.

### 6.3.1 Comportamento de (6.36) com $p \gg 1$

A partir de (6.36), ao considerar um modo de onda plana no duto principal, tem-se:

$$\int_0^{R_s} J_p(\alpha_{Gpq} r_0^*) J_0(\alpha_z^* r_0^*) r_0^* dr_0^* = \left(\frac{\alpha_{Gpq}}{2}\right)^p \times \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{\alpha_{Gpq}}{2}\right)^{2\lambda} {}_2F_1^*(-\lambda, -p-\lambda; 1; \left(\frac{\alpha_z^*}{\alpha_{Gpq}}\right)^2)}{\lambda! \Gamma(p+\lambda+1)} \right] \frac{(R_s)^{p+2\lambda+2}}{(p+2\lambda+2)} \quad (6.37)$$

A função dada por (6.37), sendo uma soma infinita, pode ter seu comportamento avaliado em situações limite através de expansões assintóticas. Com efeito, expansões assintóticas são úteis e importantes para avaliar comportamentos limites de soluções analíticas representadas por séries infinitas, conforme pontuado por DE BRUIJN [135]. Todavia, a expansão assintótica da função dada por (6.37) envolve a expansão da função hipergeométrica para o parâmetro  $|(-p-\lambda)| \rightarrow \infty$ , constituindo-se em um problema não trivial. Uma breve revisão sobre este tipo de expansão pode ser encontrada nos trabalhos de CVITKOVIĆ *et al.* [136] e de JONES [137].

Para analisar o comportamento de (6.37), são obtidos os valores da função com variação dos modos  $p$  e  $m$ , dos raios  $R_s$  da ramificação, mantendo  $R > 1$  fixo, para  $\alpha_{Gpq}$  e  $\alpha_z^*$  reais e divididos nos casos em que  $\alpha_z^* < \alpha_{Gpq}$ , na Figura 6.4, e  $\alpha_z^* > \alpha_{Gpq}$ , na Figura 6.5. Destaca-se que considerar  $\alpha_z^*$  e  $\alpha_{Gpq}$  reais implica negligenciar os termos viscosos destes fatores, todavia, a forma dos gráficos não se altera ao incluir os termos complexos.

Na Figura 6.4 tem-se um conjunto de valores dos modos,  $m = 0$  e  $p \in [0, 30]$ , avaliados na equação (6.37). Adicionalmente, ao se fixar um valor para o raio da ramificação, verifica-se que o aumento da ordem do modo da ramificação tem efeito significativo no valor da integral, ao menos para os 20 primeiros modos radiais. De fato, observando a Figura 6.4, vê-se que a função fica próxima de zero a partir do vigésimo modo radial. Para modos superiores,  $p \geq 15$ , e pequenas raios da ramificação, vê-se que a contribuição do modo de onda plana é diminuída, conforme pode ser observado a partir da Figura 6.4.

Na Figura 6.5 tem-se situação análoga, todavia com argumentos reais seguindo a relação  $\alpha_z^* > \alpha_{Gpq}$ . A diminuição gradativa do integrando conforme há aumento do modo radial também é observada. Ao comparar a Figura 6.5 com a Figura 6.4, vê-se que a função apresenta menor amplitude de oscilação, antes de ficar mais próxima de zero, para valores maiores do raio da ramificação. Com efeito, a influência do modo de onda plana fica restringida em um intervalo de modos superiores menor.

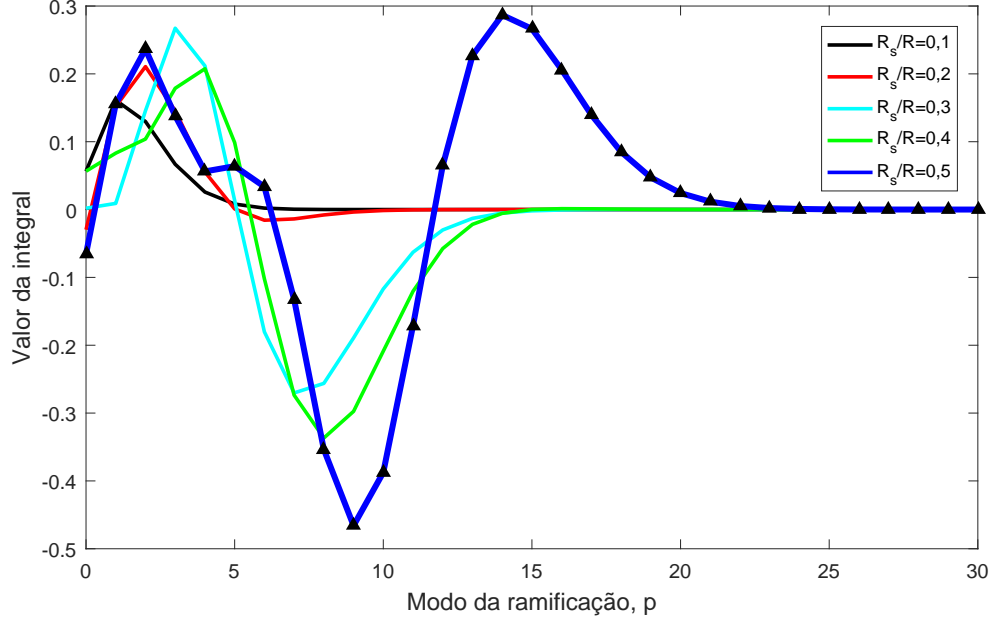


Figura 6.4: Valores de (6.37) para várias configurações de modos,  $m = 0$  e  $p \in [0, 30]$ , com  $(\alpha_z^* < \alpha_{Gpq})$  fixo e raio  $R_s$  crescente.

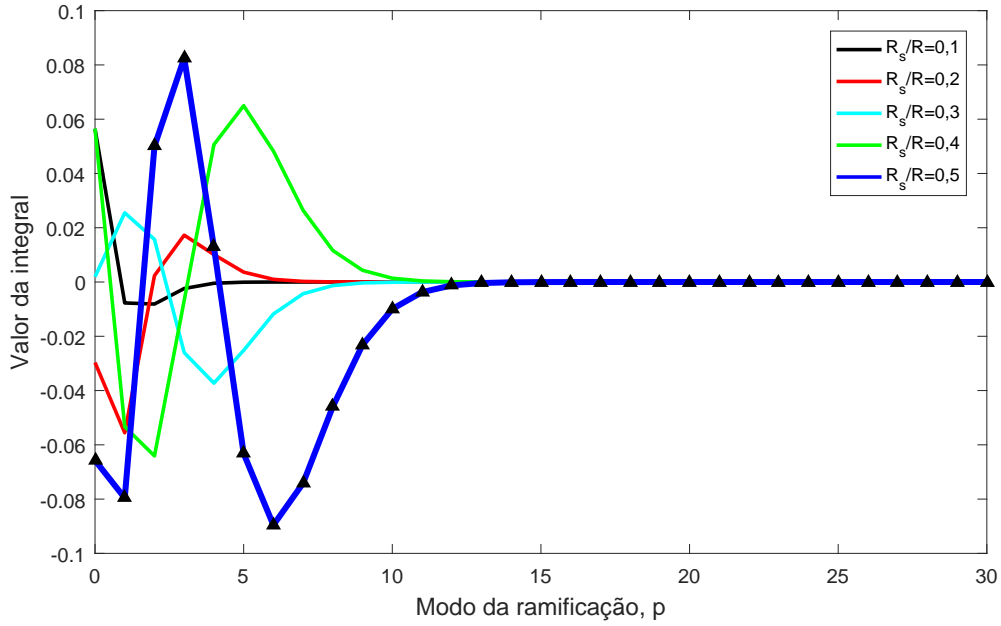


Figura 6.5: Valores de (6.37) para várias configurações de modos,  $m = 0$  e  $p \in [0, 30]$ , com  $(\alpha_z^* > \alpha_{Gpq})$  fixo e e raio  $R_s$  crescente.

Em resumo, pode-se afirmar que há interação entre os modos de onda plana do duto principal e modos superiores da ramificação. Esta interação é proporcional ao aumento do raio da ramificação e inversamente proporcional à ordem do modo da ramificação.

### 6.3.2 Influência da velocidade

O efeito do número de Mach do duto principal, na interação entre modos na ramificação, pode ser estudado ao avaliar o limite do último termo na função hipergeométrica da equação (6.37):

$$\left( \frac{\alpha_z^*}{\alpha_{Gpq}} \right)^2 \quad (6.38)$$

O número de Mach na ramificação,  $M_s$ , pode ser definido como uma fração constante  $\zeta$ , do número de Mach do duto principal:

$$M_s = \zeta M \quad (6.39)$$

Através de (6.39), tem-se que o limite de (6.38), quando  $M \gg 1$ , é finito, a menos do comportamento de  $\zeta$ , de fato:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left( \frac{\alpha_z^*}{\alpha_{Gpq}} \right)^2 = \left( \frac{4}{3}\mu + \mu_b \right) \frac{\zeta k_z \mathcal{B}(\phi)}{\sigma \mu} \quad (6.40)$$

O resultado em (6.40) é interessante uma vez que o valor adimensional do limite é controlado, de certa forma, pela função  $\mathcal{B}(\phi)$ . Argumenta-se também que, quando  $M \gg 1$  tem-se que  $M_s \gg 1$ , o que por sua vez indica, heurísticamente, que  $\zeta$  seja também crescente na mesma ordem. Com efeito, tem-se que o aumento da velocidade do duto principal aumenta os efeitos da interação entre modos. Destaca-se que não se pode considerar como estritamente válidas as afirmações para  $M \gg 1$ , uma vez que efeitos não lineares relacionados à formação de ondas de choque não foram considerados. Este fato limita os resultados qualitativos deste capítulo, e no restante do trabalho, ao regime subsônico.

### 6.3.3 Índice de vibração

NISHIGUCHI *et al.* [9] desenvolvem um índice de vibração caracterizado pela magnitude do nível de tensão da tubulação devido à vibração induzida pelo escoamento. Este índice de vibração mostrou correlação com os casos de falha devido à vibração induzida acusticamente, relatados por CARUCCI e MUELLER [8]. Este índice de vibração,  $\mathcal{I}$ , confirma alguns resultados qualitativos obtidos anteriormente e contém a seguinte proporcionalidade:

$$\mathcal{I} \propto \frac{\rho_g U_0^2 R s}{\rho_p R f_p} \quad (6.41)$$

sendo  $\rho_g$  a massa específica do gás,  $\rho_p$  a massa específica do material da tubulação

e  $f_p$  a frequência fundamental de casca da tubulação.

De (6.41) tem-se que o aumento da velocidade tende a aumentar os níveis de vibração, situação condizente com a obtida anteriormente na interação entre modos. Outro fator de influência é a razão entre massas específicas, sendo que dutos com maior massa tendem a reduzir os níveis de vibração.

O efeito do raio da ramificação, mostrado anteriormente, caracterizado pelo aumento da interação entre o modo de onda plana e modos superiores à medida que ocorre aumento do raio da ramificação, é observada em (6.41). De fato, pode-se argumentar que para levar em conta os efeitos de ordem superior o índice poderia estabelecer uma relação do tipo  $R_s^a$ , com  $a$  um fator obtido a partir de experimentos ou simulações computacionais.

ISHIGAMI *et al.* [138] relevam o índice de vibração ao realizaram experimentos estendendo os resultados experimentais obtidos por NISHIGUCHI *et al.* [9] através de melhorias na medição do escoamento, com aumento na quantidade de pontos de medição de pressão. Os resultados são comparados aos observados em simulações computacionais, para caracterizar a estrutura de turbulência existente na junção T.

Embora a adequação deste índice para vibrações devido ao escoamento seja estabelecida por NISHIGUCHI *et al.* [9], observa-se que contém proporcionalidade similar à obtida na interação entre modos radiais de ordens diferentes. Este fato corrobora a afirmação de que efeitos de baixa ordem e alta ordem interagem em descontinuidades geométricas dos sistemas de tubulação. Outro ponto a salientar é que embora considera-se que a frequência de excitação seja única, e abaixo da frequência de corte para ondas evanescentes do duto principal, a descontinuidade geométrica com pequena dimensão de raio é suscetível à interação entre modos. Esta afirmação é condizente com a grande quantidade de casos de falha relatados nestas condições [8].

### 6.3.4 Influência da viscosidade

Nota-se que as características dos argumentos não tiveram papel na determinação da interação entre os modos. Em particular, a viscosidade não impôs restrições sobre o comportamento da equação (6.37). O principal efeito da viscosidade é inserir um termo complexo nos argumentos de propagação  $\alpha_{mn}$  e  $\alpha_{Gpq}$ . Este termo complexo tem um efeito de atenuação em cada modo e esta influência é verificada através das soluções da equação de dispersão (3.34).

A descrição das condições de existência de modos propagantes ou evanescentes é afetada pela equação de dispersão (3.34) ao dificultar o estabelecimento de condições para que as raízes sejam reais ou complexas, como pode ser verificado pelas relações (3.42). De fato, pode-se afirmar que a inclusão da viscosidade tem, potencialmente,



o efeito de redução da quantidade de raízes puramente imaginárias. Para isso, seja o seguinte polinômio de grau  $n$ :

$$P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j \quad (6.42)$$

com  $d$  raízes com partes reais positivas. Então, tem-se a seguinte estimativa para o limite superior da quantidade de zeros com partes reais positivas ([114], capítulo 1, seção E.7):

$$d^2 \leq 2n \log \left( \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|}{\sqrt{|a_0 a_n|}} \right) \quad (6.43)$$

ao definir  $d_i$  como o limite superior da quantidade de zeros reais de uma relação de dispersão invíscida, (3.35), e  $d_v$  o limite para a relação de dispersão que inclui a viscosidade, (3.34), tem-se:

$$d_i^2 \leq d_v^2 = 8 \log \left( \frac{|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4|}{\sqrt{|a_0 a_4|}} \right) \quad (6.44)$$

Da desigualdade (6.44) fica evidente que a simples inclusão da viscosidade, ao aumentar o grau algébrico da relação de dispersão, torna a descrição analítica, de modos propagantes ou evanescentes, mais difícil, exigindo a utilização de métodos numéricos, caracterizados por algoritmos de busca de raízes adequados [26, 39]. Com efeito, a inclusão da viscosidade e da condutividade térmica no trabalho de DOKUMACI [26] foi responsável pelo aparecimento de modos de ordem superior anômalos, nos quais o sentido de propagação não satisfaz a condição usual dos sinais das partes imaginária e real do número de onda axial. Para chegar neste resultado, a relação de dispersão foi resolvida numericamente e a influência da viscosidade e frequência na propagação dos modos verificada através do número de Stokes.

Embora a existência de modos com partes reais e imaginárias, não respeitando a relação de decaimento (2.37), tenha sido observada por DOKUMACI [26], e a explicação física mencionada como possível resultado de uma transferência de energia dissipativa, a explicação matemática não foi desenvolvida. De fato, como já foi observado no Capítulo 3, a inclusão da viscosidade resulta em uma relação de dispersão polinomial com coeficientes complexos, tem-se então que todas as suas raízes são complexas. Além disso, é possível mostrar quais as condições para a existência dos modos anômalos pelo conceito de polinômio de Hurwitz, isto é, um polinômio com todos os zeros contendo parte real negativa [139].

Com efeito, FRANK [140] estabelece critérios para a contagem da quantidade de zeros com parte real negativa e positiva, em um polinômio de coeficientes complexos

a partir do método desenvolvido por SCHUR [139]. Um critério para a existência de todas as raízes com parte real negativa, baseado em determinantes, também é demonstrado por FRANK ([141], Teorema 3.2). Deste modo, uma abordagem matemática pode ser realizada na investigação das características das raízes da relação de dispersão, sendo uma alternativa em relação à investigação numérica dos modos.

Um outro efeito da viscosidade é tornar a velocidade de grupo,  $u_g$  complexa, podendo conter informações sobre o transporte e dissipação de energia no meio, conforme argumentado no trabalho de GERASIK e STASTNA [142]. Interessante notar que a inclusão da viscosidade altera as características das equações de propagação levando à várias implicações em diferentes e significativas áreas, sendo a propagação acústica no escoamento de um fluido viscoso, portanto, importante, no sentido dado por HARDY [143].

Destaca-se que embora as condições para a existência de modos superiores puramente evanescentes, com parte real nula, não tenham sido obtidas pela complexidade da relação de dispersão, este fato não prejudica os resultados obtidos, uma vez que os problemas de falhas em ramificações acontecem justamente próximo à junção e onde as ondas evanescentes geradas ainda não tiveram decaimento exponencial significativo.

Adicionalmente, a condição de contorno de parede rígida é utilizada através da relação  $\alpha_{01} = 0$ , sendo responsável pelo aparecimento do fator 1 no integrando da integral (6.26). Uma condição de contorno de parede com impedância finita deve mostrar novas formas de interação entre os modos em conjunto com a viscosidade. Em particular, para escoamentos invíscidos, ocorre o aparecimento de modos de superfície e hidrodinâmicos, conforme mostrado por RIENSTRA [144].

# Capítulo 7

## Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma modelagem da propagação sonora em dutos, na presença de escoamento médio uniforme, viscosidade e uma descontinuidade do domínio. Esta abordagem é utilizada na investigação da interação entre modos radiais em uma ramificação de um duto circular.

O operador de onda derivado, (3.6), através do rearranjo das equações de conservação, estende a equação dada por KINSLER *et al.* [72], ao incluir o efeito do escoamento médio, e as equações utilizadas por BRAMBLEY [21] e RIENSTRA e TESTER [39], (3.10) e (3.9), ao incluir a viscosidade. A equação obtida constitui-se em um caso especial do operador isentrópico, que inclui a condutividade térmica do escoamento, obtido por DOKUMACI [26]. Uma nova equação de dispersão é obtida, (3.34), relacionando os autovalores da equação diferencial com a frequência. A equação de dispersão também retoma, como um caso particular, a situação do escoamento de um fluido invíscido bem conhecida, (3.35), dada por RIENSTRA [19].

A condição de contorno adotada de parede rígida, (3.33) e (4.9), permite simplificação na determinação da função de Green e do campo de pressão sonora interna ao duto. Todavia, as derivações para o caso de condição de contorno de impedância acústica finita são semelhantes e a mudança de condição pode ser obtida seguindo-se o mesmo procedimento adotado nas derivações das funções de Bessel, como mostrado no Apêndice C.

Foi obtida uma função de Green para o operador encontrado, (4.32), que estende as formas conhecidas no limite invíscido, dadas por RIENSTRA e TESTER [39], mas com argumentos específicos para o caso estudado. Os detalhes da derivação são explicitados no Apêndice C. A forma de derivação da função (4.32) serve como base, possibilitando que seja diretamente aplicada para outros operadores.

As equações para a flutuação de velocidade em coordenadas cilíndricas são obtidas, (5.13), e uma relação assintótica de produtos de funções de Bessel de primeiro e segundo tipo é explicitada em (5.35). A componente axial da velocidade

é então utilizada, junto com a função de Green, em uma integral de convolução para identificar os termos que governam a interação entre modos radiais em uma ramificação cilíndrica. A resolução numérica dos modos refletidos e transmitidos é evitada ao desconsiderar o espectro de espalhamento, em uma abordagem qualitativa da interação entre modos do duto e da ramificação, conforme REDMORE e MULHOLLAND [22].

Os resultados obtidos indicam que, ao incidir na ramificação, o modo de onda plana produz uma contribuição em modos de ordem superior na ramificação. Uma relação entre as coordenadas cilíndricas dos dois trechos de dutos é obtida, (6.12), e utilizada na integral de convolução. A transformação de coordenadas impõe restrição ao domínio de integração azimutal. A dependência contínua dos modos da ramificação em função dos modos do duto principal, (6.27), é mostrada na Figura 6.4 e Figura 6.5, com diferentes combinações de modos da ramificação e do duto principal. Mostra-se que a dependência é maior nos primeiros modos da ramificação e diminui com o aumento da ordem dos modos e com a dimensão do raio da ramificação.

A viscosidade não indicou contribuir com a possível interação entre modos na ramificação, apresentando contudo influência nas características de propagação dos modos em função das raízes da equação de dispersão (3.34). Uma investigação numérica e analítica mais completa das raízes de dispersão pode estabelecer resultados semelhantes aos obtidos por DOKUMACI [26] e explicitar critérios de propagação axial dos modos.

Os resultados, para interação entre modos, sugerem que os fenômenos denominados vibração induzida pelo escoamento e vibração induzida acusticamente estão relacionados quando da existência de descontinuidades geométricas do domínio. De fato, é bem conhecido que a hipótese de propagação de ondas planas é tanto mais válida quanto mais distante de descontinuidades do duto. Outro ponto a salientar, é que pequenas dimensões de raios na ramificação cilíndrica também apresentaram interação entre os modos superiores e o modo de onda plana do duto principal. Tal afirmação é condizente com os relatos de casos de falha por fadiga em tubulações de pequeno diâmetro, reportada originalmente por CARUCCI e MUELLER [8]. Todavia, verifica-se que uma maior dimensão de raio da ramificação permite que mais modos superiores sejam excitados na ramificação.

Como sugestão de trabalhos futuros, tem-se:

- Inclusão de condição de contorno de parede com impedância acústica finita e comparar resultados obtidos por DOKUMACI [26] e BRAMBLEY [21].
- Utilização do Método de Wiener-Hopf para descrever mudanças abruptas do domínio, utilizado em curvas por BRAMBLEY [21].
- Obtenção dos coeficientes de reflexão e transmissão na junção através de forma-

lismo matricial e truncamento de modos, como realizado por MUEHLEISEN [23].

- Avaliação numérica e analítica das raízes da equação de dispersão (3.34), indicando suas características no domínio complexo através do método dado por FRANK [140], aumentando a compreensão sobre a existência e o comportamento de modos evanescentes e propagantes.
- Validar os resultados qualitativos obtidos, para a influência do modo de onda plana, através de simulações numéricas do escoamento.
- Desenvolver uma análise acoplada com os modos da estrutura dos dutos, identificando os parâmetros que facilitam a transferência de energia acústica para a estrutura e as condições de ressonância, construindo sobre a abordagem de índices de vibração de NISHIGUCHI *et al.* [9].



# Referências Bibliográficas

- [1] LIGHTHILL, M. J. “On sound generated aerodynamically. I. General theory”. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 211, pp. 564–587. The Royal Society, 1952.
- [2] LIGHTHILL, M. J. “On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound”. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 222, pp. 1–32. The Royal Society, 1954.
- [3] CURLE, N. “The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound”. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 231, pp. 505–514. The Royal Society, 1955.
- [4] ZIADA, S. “Flow-excited acoustic resonance in industry”, *Journal of Pressure Vessel Technology*, v. 132, n. 1, pp. 015001, 2010.
- [5] BRUGGEMAN, J. *Flow induced pulsations in pipe systems*. Tese de Doutorado, Technische Universiteit Eindhoven, 1987.
- [6] HOFMANS, G. *Vortex sound in confined flows*. Tese de Doutorado, Technische Universiteit Eindhoven, 1998.
- [7] PETERS, M. C. *Aeroacoustic sources in internal flows*. Tese de Doutorado, Technische Universiteit Eindhoven, 1993.
- [8] CARUCCI, V., MUELLER, R. “Acoustically induced piping vibration in high-capacity pressure reducing systems”. In: *Mechanical Engineering*, v. 105, pp. 87–87. American Society of Mechanical Engineers, 1983.
- [9] NISHIGUCHI, M., IZUCHI, H., MINORIKAWA, G. “Investigation of Characteristic of Flow Induced Vibration Caused by Turbulence Relating to Acoustically Induced Vibration”. In: *ASME 2014 Pressure Vessels and Piping Conference*, pp. V003T03A005–V003T03A005. American Society of Mechanical Engineers, 2014.

- [10] EISINGER, F. “Designing piping systems against acoustically induced structural fatigue”, *Journal of Pressure Vessel Technology*, v. 119, n. 3, pp. 379–383, 1997.
- [11] IZUCHI, H., NISHIGUCHI, M., LEE, G. Y. “Fatigue life estimation of piping system for evaluation of acoustically induced vibration (AIV)”, *Institute of Noise Control Engineering, Proceedings of Inter-Noise*, 2014.
- [12] ZIADA, S., SHINE, S. “Strouhal numbers of flow-excited acoustic resonance of closed side branches”, *Journal of Fluids and Structures*, v. 13, n. 1, pp. 127–142, 1999.
- [13] KRIESELS, P., PETERS, M., HIRSCHBERG, A., et al. “High amplitude vortex-induced pulsations in a gas transport system”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 184, n. 2, pp. 343–368, 1995.
- [14] TONON, D., WILLEMS, J., HIRSCHBERG, A. “Flow-Induced Pulsations in Pipe Systems With Closed Side Branches: Study of the Effectiveness of Detuning as a Remedial Measure”. In: *20th International Congress on Acoustics, Sydney, Australia*, 2010.
- [15] BRUCE, R. D., BOMMER, A. S., LEPAGE, T. E. “Solving acoustic-induced vibration problems in the design stage”, *Sound and Vibration*, v. 47, n. 8, 2013.
- [16] LIU, Y., DIWAKAR, P., LIN, D., et al. “Development of Design Curve for Swept Subjected to Acoustic Induced Vibration”. In: *ASME 2016 Pressure Vessels and Piping Conference*, pp. V003T03A013–V003T03A013. American Society of Mechanical Engineers, 2016.
- [17] KEDAR, M. B. B., GULAVE, M. J. S. “Acoustically Induced Vibration (AIV) & Flow Induced Vibration (FIV) Analysis for the High Pressure Reducing Systems using Energy Institute Guidelines”, *Journal for Research—Volume*, v. 2, n. 11, 2017.
- [18] HIRSCHBERG, A., RIENSTRA, S. *An introduction to aeroacoustics*. Eindhoven University of Technology, 2016.
- [19] RIENSTRA, S. W. “Fundamentals of duct acoustics”, *Von Karman Institute Lecture Notes*, 2015.
- [20] HARPER, C. B. “AIV and FIV in Pipelines, Plants, and Facilities”. In: *2016 11th International Pipeline Conference*, pp. V001T03A092–V001T03A092. American Society of Mechanical Engineers, 2016.



- [21] BRAMBLEY, E. J. *The acoustics of curved and lined cylindrical ducts with mean flow*. Tese de Doutorado, University of Cambridge, 2007.
- [22] REDMORE, T., MULHOLLAND, K. “The application of mode coupling theory to the transmission of sound in the sidebranch of a rectangular duct system”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 85, n. 3, pp. 323–331, 1982.
- [23] MUEHLEISEN, R. T. *Reflection, radiation, and coupling of higher order modes at discontinuities in finite length rigid walled rectangular ducts*. Tese de Doutorado, The Pennsylvania State University, 1996.
- [24] KEEFE, D. H. “Theory of the single woodwind tone hole”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 72, n. 3, pp. 676–687, 1982.
- [25] DUBOS, V., KERGOMARD, J., KHETTABI, A., et al. “Theory of sound propagation in a duct with a branched tube using modal decomposition”, *Acta Acustica united with Acustica*, v. 85, n. 2, pp. 153–169, 1999.
- [26] DOKUMACI, E. “On the effect of viscosity and thermal conductivity on sound propagation in ducts: A re-visit to the classical theory with extensions for higher order modes and presence of mean flow”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 333, n. 21, pp. 5583–5599, 2014.
- [27] KHAMIS, D., BRAMBLEY, E. J. “Viscous effects on the acoustics and stability of a shear layer over an impedance wall”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 810, pp. 489–534, 2017.
- [28] KHAMIS, D., BRAMBLEY, E. J. “Viscous effects on the attenuation of a plane wave by an acoustic lining in shear flow”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 141, n. 4, pp. 2408–2417, 2017.
- [29] BRAMBLEY, E. J. “Acoustic implications of a thin viscous boundary layer over a compliant surface or permeable liner”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 678, pp. 348–378, 2011.
- [30] MUSAFIR, R. E. “A discussion on the structure of aeroacoustic wave equations”. In: *Proceedings of the 4th Congress on Acoustics, Marseille, France*, pp. 923–926, 1997.
- [31] HOWE, M. S. “The dissipation of sound at an edge”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 70, n. 3, pp. 407–411, 1980.
- [32] HOWE, M. S. *Acoustics of fluid-structure interactions*. Cambridge, Cambridge University Press, 1998.

- [33] BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [34] HOWE, M. S. *Acoustics of fluid-structure interactions*. Cambridge University Press, 1998.
- [35] CRIGHTON, D. G., DOWLING, A. P., FLOWCS WILLIAMS, J. E., et al. *Modern methods in analytical acoustics*. Springer, New York, 1992.
- [36] BRUGGEMAN, J. C. “The propagation of low-frequency sound in a two-dimensional duct system with T joints and right angle bends: Theory and experiment”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 82, n. 3, pp. 1045–1051, 1987.
- [37] STEIN, E. M., SHAKARCHI, R. *Fourier analysis: An introduction. Princeton Lectures in Analysis, I*, v. 1. Princeton University Press, 2011.
- [38] MATHEWS, J., PEAKE, N. “The acoustic Green’s function for swirling flow in a lined duct”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 395, pp. 294–316, 2017.
- [39] RIENSTRA, S. W., TESTER, B. J. “An analytic Green’s function for a lined circular duct containing uniform mean flow”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 317, n. 3, pp. 994–1016, 2008.
- [40] MATTHEWS, J. R. *Mathematical modelling of noise generation in turbofan aeroengines using Greens functions*. Tese de Doutorado, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, 2016.
- [41] RAYLEIGH, L. *The theory of sound*. Dover, New York, 1945.
- [42] TAO, T. “What is good mathematics?” *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 44, n. 4, pp. 623–634, 2007.
- [43] DOWLING, A. P., FLOWCS WILLIAMS, J. E. *Sound and sources of sound*. Horwood, 1983.
- [44] MUSAFIR, R. E. “On the source terms in Lilley’s equation”, *ACTA Acustica united with Acustica*, v. 93, n. 2, pp. 263–274, 2007.
- [45] LAYTON, W., NOVOTNÝ, A. “On Lighthills acoustic analogy for low Mach number flows”. In: *New Directions in Mathematical Fluid Mechanics*, Springer, pp. 247–279, 2009.

- [46] FLOWCS WILLIAMS, J. E., HAWKINGS, D. L. “Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 264, n. 1151, pp. 321–342, 1969.
- [47] Lighthill, M. J. *An introduction to Fourier analysis and generalised functions*. Cambridge University Press, 1958.
- [48] PHILLIPS, O. M. “On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 9, n. 01, pp. 1–28, 1960.
- [49] MUSAFIR, R. E. “Sound Generation by fluid flow”. In: *Proceedings of the 23rd Congress on Sound and Vibration, Athens, Greece*, pp. –, 2016.
- [50] GOLDSTEIN, M. E. “A generalized acoustic analogy”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 488, pp. 315–333, 2003.
- [51] POWELL, A. “Theory of vortex sound”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 36, n. 1, pp. 177–195, 1964.
- [52] HOWE, M. “Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 71, n. 04, pp. 625–673, 1975.
- [53] JENVEY, P. “The sound power from turbulence: a theory of the exchange of energy between the acoustic and non-acoustic fields”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 131, n. 1, pp. 37–66, 1989.
- [54] TONON, D., WILLEMS, J., HIRSCHBERG, A. “Self-sustained oscillations in pipe systems with multiple deep side branches: Prediction and reduction by detuning”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, n. 24, pp. 5894–5912, 2011.
- [55] TONON, D., HIRSCHBERG, A., GOLLIARD, J., et al. “Aeroacoustics of pipe systems with closed branches”, *noise notes*, v. 10, n. 3, pp. 27–88, 2011.
- [56] SALT, E., MOHAMED, S., ARTHURS, D., et al. “Aeroacoustic sources generated by flow–sound interaction in a T-junction”, *Journal of Fluids and Structures*, v. 51, pp. 116–131, 2014.
- [57] MUNJAL, M. L. *Acoustics of ducts and mufflers with application to exhaust and ventilation system design*. John Wiley & Sons, 1987.

- [58] NAKAMURA, T., KANEKO, S., INADA, F., et al. *Flow-induced vibrations: Classifications and lessons from practical experiences*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [59] PRIDMORE-BROWN, D. C. “Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 30, n. 7, pp. 670–670, 1958.
- [60] MORFEY, C. “Sound transmission and generation in ducts with flow”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 14, n. 1, pp. 37–55, 1971.
- [61] TESTER, B. “The propagation and attenuation of sound in lined ducts containing uniform or plug flow”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 28, n. 2, pp. 151–203, 1973.
- [62] REED, M., SIMON, B. *Methods of modern mathematical physics. vol. 1. Functional analysis*. Academic, 1980.
- [63] BLASS, A. “Existence of bases implies the axiom of choice”, *Contemporary Mathematics*, v. 31, 1984.
- [64] SWINBANKS, M. “The sound field generated by a source distribution in a long duct carrying sheared flow”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 40, n. 1, pp. 51–76, 1975.
- [65] DOAK, P. “Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length (I): The effects of duct cross-section geometry and source distribution space-time pattern”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 31, n. 1, pp. 1–72, 1973.
- [66] DOAK, P. “Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length (II): The effects of duct length”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 31, n. 2, pp. 137–174, 1973.
- [67] DOAK, P. “Fundamentals of aerodynamic sound theory and flow duct acoustics”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 28, n. 3, pp. 527–561, 1973.
- [68] MICHALKE, A. “On the propagation of sound generated in a pipe of circular cross-section with uniform mean flow”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 134, n. 2, pp. 203–234, 1989.
- [69] SHEPHERD, I., CABELLI, A. “Transmission and reflection of higher order acoustic modes in a mitred duct bend”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 77, n. 4, pp. 495–511, 1981.

- [70] GOGATE, G., MUNJAL, M. “Analytical solution of sound propagation in lined or unlined circular ducts with laminar mean flow”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 160, n. 3, pp. 465–484, 1993.
- [71] GOLDSTEIN, M. *Aeroacoustics*. Mc Graw-Hill Book Co, 1976.
- [72] KINSLER, L. E., FREY, A. R., COPPENS, A. B., et al. *Fundamentals of Acoustics*. Wiley-VCH, 1999.
- [73] DOKUMACI, E. “On the effect of viscosity and thermal conductivity on sound power transmitted in uniform circular ducts”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 363, pp. 560–570, 2016.
- [74] MYERS, M. “On the acoustic boundary condition in the presence of flow”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 71, n. 3, pp. 429–434, 1980.
- [75] POSSON, H., PEAKE, N. “The acoustic analogy in an annular duct with swirling mean flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 726, pp. 439–475, 2013.
- [76] MILES, J. W. “The analysis of plane discontinuities in cylindrical tubes. Part I”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 17, n. 3, pp. 259–271, 1946.
- [77] MILES, J. W. “The analysis of plane discontinuities in cylindrical tubes. Part II”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 17, n. 3, pp. 272–284, 1946.
- [78] CUMMINGS, A. “Sound transmission in 180o duct bends of rectangular section”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 41, n. 3, pp. 321–334, 1975.
- [79] NELSON, P., HALLIWELL, N., DOAK, P. “Fluid dynamics of a flow excited resonance, part I: experiment”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 78, n. 1, pp. 15–38, 1981.
- [80] NELSON, P., HALLIWELL, N., DOAK, P. “Fluid dynamics of a flow excited resonance, Part II: Flow acoustic interaction”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 91, n. 3, pp. 375–402, 1983.
- [81] JUNGOWSKI, W., BOTROS, K., STUDZINSKI, W. “Cylindrical side-branch as tone generator”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 131, n. 2, pp. 265–285, 1989.
- [82] VERITAS, D. N. “Structural Analysis of Piping Systems”, *Norway: DNV*, 2008.

- [83] HOWE, M. S. *Theory of vortex sound*, v. 33. Cambridge University Press, 2003.
- [84] BRUGGEMAN, J., HIRSCHBERG, A., VAN DONGEN, M., et al. “Self-sustained aero-acoustic pulsations in gas transport systems: experimental study of the influence of closed side branches”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 150, n. 3, pp. 371–393, 1991.
- [85] ZIADA, S., BÜHLMANN, E. “Self-excited resonances of two side-branches in close proximity”, *Journal of Fluids and Structures*, v. 6, n. 5, pp. 583–601, 1992.
- [86] FÖLLER, S., POLIFKE, W., TONON, D. “Aeroacoustic characterization of t-junctions based on large eddy simulation and system identification”. In: *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, p. 3985, 2010.
- [87] HOLMBERG, A., KIERKEGAARD, A., WENG, C. “A frequency domain linearized Navier–Stokes method including acoustic damping by eddy viscosity using RANS”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 346, pp. 229–247, 2015.
- [88] SALT, E., MOHAMED, S., ARTHURS, D., et al. “Identification of Aeroacoustic Sources in a T-Junction”. In: *ASME 2014 Pressure Vessels and Piping Conference*, pp. V004T04A005–V004T04A005. American Society of Mechanical Engineers, 2014.
- [89] TANG, S., LAM, G. “On sound propagation from a slanted side branch into an infinitely long rectangular duct”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 124, n. 4, pp. 1921–1929, 2008.
- [90] LAU, S.-K., LEUNG, K.-H. “Transmission characteristics of a tee-junction in a rectangular duct at higher-order modes”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 126, n. 6, pp. 3028–3039, 2009.
- [91] GRAF, T., PAN, J. “Determination of the complex acoustic scattering matrix of a right-angled duct”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 134, n. 1, pp. 292–299, 2013.
- [92] PROUDMAN, I. “The generation of noise by isotropic turbulence”. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 214, pp. 119–132. The Royal Society, 1952.
- [93] EVANS, N. “Measurement of High Amplitude Relief Valve Noise for Acoustically Induced Vibration and Comparison to Predictive Methods”. In:

- ASME 2014 Pressure Vessels and Piping Conference*, pp. V003T03A006–V003T03A006. American Society of Mechanical Engineers, 2014.
- [94] GHOSH, A., NIU, Y., ARJUNAN, R. “Difficulties in predicting cycles of failure using finite element analysis of acoustically induced vibration (AIV) problems in piping systems”. In: *ASME 2014 Pressure Vessels and Piping Conference*, pp. V003T03A004–V003T03A004. American Society of Mechanical Engineers, 2014.
- [95] TAYLOR, G. I. “Statistical theory of turbulence”. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 151, pp. 421–444. The Royal Society, 1935.
- [96] DE KARMAN, T., HOWARTH, L. “On the statistical theory of isotropic turbulence”. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 164, pp. 192–215. The Royal Society, 1938.
- [97] BATCHELOR, G. K. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press, 1953.
- [98] BLEVINS, R. *Flow-induced Vibration*. Krieger Publishing Company, 2001.
- [99] ROMANO, R., SQUADRONE, G., DRAGONETTI, R. “Piping fatigue failures by acoustically induced vibration: when design optimization may sacrifice mechanical integrity and safety”, *AIA-DAGA 2013 Proceedings, Paper*, v. 776, pp. 1526–1529, 2013.
- [100] INSTITUTE, E. *Guidelines for the Avoidance of Vibration Induced Fatigue in Process Pipework*. 2nd Edition, 2008.
- [101] ALLISON, T. C., BENNETT, J. “Acoustically Induced Vibration Mitigations in Compressor Piping Systems”. In: *ASME Turbo Expo 2016: Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, pp. V009T24A023–V009T24A023. American Society of Mechanical Engineers, 2016.
- [102] KATAOKA, S., HIDA, T. “Evaluation of Stress in Vibrating Cylindrical Shells due to Acoustic Loading Based on Theory of Shells”. In: *ASME 2016 Pressure Vessels and Piping Conference*, pp. V003T03A019–V003T03A019. American Society of Mechanical Engineers, 2016.
- [103] KATAOKA, S. “Study on the Mechanism of Fatigue Failure at Branch Connections Caused by Shell Mode Vibration”. In: *ASME 2017 Pressure Ves-*

*sels and Piping Conference*, pp. V004T04A059–V004T04A059. American Society of Mechanical Engineers, 2017.

- [104] ELDREDGE, J. D. “On the interaction of higher duct modes with a perforated liner system with bias flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 510, pp. 303–331, 2004.
- [105] WATSON, G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, 1995.
- [106] GRAY, A., MATHEWS, G. B., MEISSEL, E. *A treatise on Bessel functions and their applications to physics*. Macmillan and Company, 1895.
- [107] LEBEDEV, N. N. *The special functions and their applications*. Dover, 1965.
- [108] KORENEV, B. G. *Bessel functions and their applications*. CRC Press, 2003.
- [109] STEIN, E. M., SHAKARCHI, R. *Complex analysis. Princeton Lectures in Analysis, II*. Princeton University Press, 2003.
- [110] BRAMBLEY, E. J. “Fundamental problems with the model of uniform flow over acoustic linings”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 322, n. 4, pp. 1026–1037, 2009.
- [111] HADAMARD, J. “Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique”, *Princeton University Bulletin*, pp. 49–52, 1902.
- [112] BRAMBLEY, E. J. “A well-posed modified Myers boundary condition”. In: *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, p. 3942, 2010.
- [113] RIENSTRA, S., DARAU, M. “Mean flow boundary layer effects of hydrodynamic instability of impedance wall”, *Procedia Engineering*, v. 6, pp. 124–132, 2010.
- [114] BORWEIN, P., ERDÉLYI, T. *Polynomials and polynomial inequalities*, v. 161. Springer Science & Business Media, 2012.
- [115] AHLFORS, L. V. *Complex Analysis, (International series in pure and applied mathematics)*. McGraw-Hill, 1979.
- [116] CRAMER, M. “Numerical estimates for the bulk viscosity of ideal gases”, *Physics of fluids*, v. 24, n. 6, 2012.
- [117] GARDNER, R. B., GOVIL, N. “Eneström–Takeya Theorem and Some of Its Generalizations”. In: *Current Topics in Pure and Computational Complex Analysis*, Springer, pp. 171–199, 2014.



- [118] OPPENEER, M. *Sound propagation in lined ducts with parallel flow*. Tese de Doutorado, Technische Universiteit Eindhoven, 2014.
- [119] LIN, J., SCALO, C., HESSELINK, L. “Bulk viscosity model for near-equilibrium acoustic wave attenuation”, *arXiv preprint arXiv:1707.05876*, 2017.
- [120] KEEFE, D. H. “Acoustical wave propagation in cylindrical ducts: Transmission line parameter approximations for isothermal and nonisothermal boundary conditions”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 75, n. 1, pp. 58–62, 1984.
- [121] HUERRE, P., KARAMCHETI, K. *Effects of friction and heat conduction on sound propagation in ducts*. Tese de Doutorado, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford University., 1976.
- [122] RAYLEIGH, J. W. S. B. *The theory of sound*, v. 2. Macmillan, 1896.
- [123] MORSE, P. M., INGARD, K. U. *Theoretical acoustics*. Princeton University Press, 1968.
- [124] COUTO, R. T. “Some comments on improper integrals representing physical quantities”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, n. 3, pp. 313–324, 2007.
- [125] OLVER, F. W., LOZIER, D. W., BOISVERT, R. F., et al. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, 2010.
- [126] ZIADA, S., MCLAREN, K., LI, Y. “Flow-acoustic coupling in T-junctions: effect of T-junction geometry”, *Journal of Pressure Vessel Technology*, v. 131, n. 4, pp. 041302, 2009.
- [127] ZIADA, S., SCOTT, A., ARTHURS, D. “Acoustic excitation by flow in T-junctions”, *Journal of Pressure Vessel Technology*, v. 129, n. 1, pp. 14–20, 2007.
- [128] MATHEMATICA, W. “Wolfram Research”, *Inc., Champaign, Illinois*, 2009.
- [129] BAUERHEIM, M., NDIAYE, A., CONSTANTINE, P., et al. “Symmetry breaking of azimuthal thermoacoustic modes: the UQ perspective”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 789, pp. 534–566, 2016.
- [130] POCHERNYAEV, V. “Integrals of products of Bessel functions for applied electrodynamic problems”, *Ukrainian Mathematical Journal*, v. 47, n. 4, pp. 658–662, 1995.

- [131] BARICZ, Á. *Generalized Bessel functions of the first kind*. Springer, 2010.
- [132] BEUKERS, F. “Hypergeometric functions, how special are they?” *Notices of the American Mathematical Society*, v. 61, n. 1, pp. 48–56, 2014.
- [133] RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis (International Series in Pure & Applied Mathematics)*. McGraw-Hill Publishing Co., 1976.
- [134] PEARSON, J. W. *Computation of hypergeometric functions*. Dissertação de Mestrado, University of Oxford, 2009.
- [135] DE BRUIJN, N. G. *Asymptotic methods in analysis*, v. 4. Courier Corporation, 1970.
- [136] CVITKOVIĆ, M., SMITH, A.-S., PANDE, J. “Asymptotic expansions of the hypergeometric function with two large parameters - application to the partition function of a lattice gas in a field of traps”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 50, n. 26, pp. 265206, 2017.
- [137] JONES, D. “Asymptotics of the hypergeometric function”, *Mathematical methods in the applied sciences*, v. 24, n. 6, pp. 369–389, 2001.
- [138] ISHIGAMI, T., NISHIGUCHI, M., MAEKAWA, M., et al. “Turbulent Structure Study on Flow-Induced Vibration in Tee Junction Pipe”. In: *ASME 2017 Pressure Vessels and Piping Conference*, pp. V004T04A045–V004T04A045. American Society of Mechanical Engineers, 2017.
- [139] SCHUR, J. “Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 147, pp. 205–232, 1917.
- [140] FRANK, E. “On the real parts of the zeros of complex polynomials and applications to continued fraction expansions of analytic functions”, *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 62, n. 2, pp. 272–283, 1947.
- [141] FRANK, E. “On the zeros of polynomials with complex coefficients”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 52, n. 2, pp. 144–157, 1946.
- [142] GERASIK, V., STASTNA, M. “Complex group velocity and energy transport in absorbing media”, *Physical Review E*, v. 81, n. 5, pp. 056602, 2010.
- [143] HARDY, G. H. *A mathematician’s apology*. Cambridge University Press, 1992.

- [144] RIENSTRA, S. W. “A classification of duct modes based on surface waves”, *Wave motion*, v. 37, n. 2, pp. 119–135, 2003.
- [145] RUDIN, W. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-Hill Education, 1987.
- [146] LIMA, E. L. *Curso de análise, Volume 1*. 14 ed. Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 2016.
- [147] BÔCHER, M. “On Bessel’s functions of the second kind”, *The Annals of Mathematics*, v. 6, n. 4, pp. 85–90, 1892.

# Apêndice A

## Vorticidade e energia

Sendo a equação (2.33) a base para os métodos de resolução dos problemas acústicos de ressonância em baixa frequência, o procedimento para sua obtenção é revisto.

Para um fluido invíscido, sem forças de corpo e isentrópico, tem-se para a forma de Crocco da equação do momento [31]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x_i} = (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_i \quad (\text{A.1})$$

Através da decomposição de Helmholtz, tem-se:

$$\frac{\partial u_{isol}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi'}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial B}{\partial x_i} = (\mathbf{u}_{sol} \times \boldsymbol{\omega})_i + (\mathbf{u}_{pot} \times \boldsymbol{\omega})_i \quad (\text{A.2})$$

Considerando campo de velocidade potencial médio uniforme, e tomando o produto escalar pelo campo de velocidade solenoidal, vem:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(u_{isol}u_{isol})}{\partial t} + u_{isol} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial t} + B \right) \right] = u_{isol} (\mathbf{u}_{pot} \times \boldsymbol{\omega})_i \quad (\text{A.3})$$

Integrando em um volume  $\Omega \rightarrow \infty$  e reconhecendo que o segundo termo do lado esquerdo de (A.3) decresce com o cubo da distância [33], obtém-se:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial(u_{isol}u_{isol})}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} u_{isol} (\mathbf{u}_{pot} \times \boldsymbol{\omega})_i d\Omega \quad (\text{A.4})$$

A equação (A.4) equivale à taxa de absorção ou transferência de energia acústica pelo escoamento devido à interação com o campo solenoidal e potencial, sendo equivalente à equação (2.33) ao tomarmos uma média temporal e multiplicarmos pela massa específica uniforme.

# Apêndice B

## Conceitos de análise complexa

### B.0.5 Conceitos básicos

Neste apêndice são definidos alguns fundamentos da teoria das funções definidas em domínios complexos. Os resultados são utilizados como referência para alguns desenvolvimentos executados ao longo do texto. Em particular, para o estudo das características da função (4.11).

**Definição B.1** ([109], capítulo 2). *Seja  $\Omega$  um conjunto aberto em  $\mathbb{C}$  e uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . A função  $f$  é holomorfa no ponto  $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$  se o limite:*

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (h \in \mathbb{C}) \quad (\text{B.1})$$

*existe quando  $h \rightarrow 0$ , com  $h \neq 0$  e  $z_0 + h \in \Omega$ .*

Uma função  $f = u + iv$ , holomorfa, deve satisfazer as Equações de *Cauchy – Riemann* dadas abaixo [109, 115, 145]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{B.2})$$

sendo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Para demonstrar o resultado acima, considera-se o limite no qual a variável  $h$  é puramente real, e, depois, puramente complexa [145]. Em particular, pode-se mostrar que as partes reais e imaginárias de uma função holomorfa são harmônicas [109].

Um função é holomorfa em  $\Omega$  se for holomorfa em todo ponto de  $\Omega$ . Uma função holomorfa em todo o plano complexo  $\mathbb{C}$  é chamada de inteira [109, 145].

**Definição B.2** ([115], capítulo 5). *Uma sequência  $z_1, z_2, \dots$  de números complexos é dita convergir à um número  $w \in \mathbb{C}$  se:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| = 0 \text{ e escreve-se } w = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \quad (\text{B.3})$$

**Definição B.3** ([133], capítulo 3). *Uma sequência  $z_n$  é de Cauchy, se:*

$$\forall \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{Z}_+ \text{ tal que } n, m > 0 \text{ e } n, m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \epsilon \quad (\text{B.4})$$

Um espaço métrico é dito ser completo se toda sequência de *Cauchy* converge [109],[133]. Em particular, o conjunto dos números reais,  $\mathbb{R}$ , e o conjunto dos números complexos,  $\mathbb{C}$ , são completos [62].

Define-se um disco aberto  $D_r(z_0)$ , de raio  $r$  e centro  $z_0$  como [109]:

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

sendo  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ .

De modo análogo, define-se o disco fechado,  $\overline{D}_r(z_0)$ , de raio  $r$  e centro  $z_0$  como [109]:

$$\overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

O contorno dos discos definidos acima é o círculo [109]:

$$C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

**Definição B.4** ([133], capítulo 2). *Um ponto,  $z_0 \in \mathbb{C}$ , é um ponto limite, ou ponto de acumulação, de um conjunto  $\Omega$  se qualquer disco aberto  $D_r(z_0)$  possui um ponto  $z \in \Omega$ .*

**Definição B.5** ([109], capítulo 2). *Uma função  $f$ , definida em um conjunto  $\Omega$  de números complexos, é contínua em um ponto  $z_0 \in \Omega$  se:*

$$\forall \epsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ tal que } z \in \Omega \text{ e } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad (\text{B.5})$$

**Proposição B.1** ([109],[115],[145]). *Se  $f$  e  $g$  são holomorfas em um conjunto  $\Omega$ , então:*

- $f + g$  é holomorfa em  $\Omega$  e  $(f + g)' = f' + g'$ .
- $fg$  é holomorfa em  $\Omega$  e  $(fg)' = f'g + fg'$ .

- Se  $g(z_0) \neq 0$ , então  $f/g$  é holomorfa em  $z_0$  e

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Além disso, se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  são holomorfas, a regra da cadeia é válida

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) \quad , \forall z \in \Omega.$$

sendo  $g \circ f$  a composição das funções.

Define-se uma singularidade pontual, de uma função  $f$ , como o número complexo  $z_0$  tal que  $f$  é definida em uma vizinhança de  $z_0$ , exceto em  $z_0$  [109]. As singularidades podem ser removíveis, polos e essenciais [115]. Um polo,  $z_0$  de uma função  $f$  é tal que  $f$  é definida em toda vizinhança de  $z_0$ , e tal que a função  $1/f \equiv 0$ , em  $z_0$ , é holomorfa em uma vizinhança de  $z_0$  e também em  $z_0$  [109].

**Teorema B.2** (Raio de Convergência [109, 133]). *Dada uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , existe  $0 \leq R \leq \infty$  tal que:*

- Se  $|z| < R$  a série converge absolutamente.
- Se  $|z| > R$  a série diverge.

Além disso, ao convencionar que  $\frac{1}{0} = \infty$  e  $\frac{1}{\infty} = 0$ , o raio  $R$  é dado pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (\text{B.6})$$

sendo  $R$  o raio de convergência da série de potências e a região  $|z| < R$  o disco de convergência.

Em conjunto com o Teorema B.2, também são úteis os testes de convergência de uma série de potências.

**Teorema B.3** (Teste da raiz [133], capítulo 3). *Dada uma série  $\sum a_n$ , seja  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , então:*

- Se  $\alpha < 1$ , a série converge.
- Se  $\alpha > 1$ , a série diverge.
- Se  $\alpha = 1$ , o teste é inconclusivo.

A prova do Teorema B.3 faz uso da propriedade de convergência limitada das séries [133, 146], isto é, mostra-se que existe uma série convergente e que limita a série  $\sum a_n$ , implicando na sua convergência.

**Teorema B.4** (Teste da razão [133], capítulo 3). *Dada uma série  $\sum a_n$ , seja  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , então:*

- *Se  $\alpha < 1$ , a série converge.*
- *Se  $\alpha \geq 1$ , a série diverge para todo  $n \geq n_0$ , sendo  $n_0$  um inteiro fixo.*

A importância do Teorema B.2 torna-se evidente para as funções holomorfas pelo seguinte resultado:

**Teorema B.5** ([109, 133, 146]). *Uma série de potências  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , define uma função holomorfa em seu disco de convergência. A derivada de  $f$  é também uma série de potências obtida por diferenciação termo a termo da série para  $f$ , dada por,*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad (\text{B.7})$$

*Além disso,  $f'(z)$  possui o mesmo raio de convergência de  $f$ .*

**Definição B.6** ([109], capítulo 3). *Uma função  $f$ , definida em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , é chamada de meromorfa se existe uma sequência de pontos  $\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$  que não possui pontos limite em  $\Omega$ , e tal que:*

- *A função  $f$  é holomorfa em  $\Omega - \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ , e*
- *A função  $f$  tem polos nos pontos  $\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ .*

**Teorema B.6** ([109], capítulo 3). *Suponha que  $f$  é holomorfa em um conjunto aberto  $\Omega$ , que não é a união de dois conjuntos separados não vazios, tenha um zero em um ponto  $z_0 \in \Omega$  e não é identicamente nula em  $\Omega$ . Então existe uma vizinhança  $U \subset \Omega$  de  $z_0$ , uma função holomorfa  $g$  em  $U$  e um inteiro positivo único  $n$  tal que:*

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad \forall z \in U \quad (\text{B.8})$$

*sendo  $n$  ordem do zero da função  $f$  em  $z_0$ .*

O Teorema B.6 é importante para o próximo resultado, que explicita o conceito de resíduos:



**Teorema B.7** ([109], capítulo 3). *Se  $f$  tem um polo de ordem  $n$  em  $z_0$ , então:*

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + G(z) \quad (\text{B.9})$$

*sendo  $G$  holomorfa em um disco aberto centrado em  $z_0$  e o coeficiente  $a_{-1}$  o resíduo de  $f$  no polo.*

**Teorema B.8** (Fórmula do Resíduo [109], capítulo 3, Corolário 2.3). *Suponha que  $f$  é holomorfa em um conjunto aberto contendo o contorno  $\gamma$  e seu interior, exceto por polos nos pontos  $z_1, \dots, z_N$  dentro de  $\gamma$ . Então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}_{z_k} f. \quad (\text{B.10})$$

# Apêndice C

## Demonstrações e deduções

### C.1 Dedução da equação (4.7)

Nesta seção é deduzida a solução particular da equação (4.5) através do método de variação de parâmetros. A solução homogênea de (4.5),  $G_h \in W$ , é coberta com a lista linearmente independente  $(w_1(x), w_2(x))$ , sendo  $(v_1, \dots, v_n)$  e  $(w_1, \dots, w_n)$  as bases dos espaços vetoriais  $V$  e  $W$ . A solução particular,  $G_p$ , é dada por:

$$G_p = a_1(x)w_1(x) + a_2(x)w_2(x) \quad (\text{C.1})$$

sendo os coeficientes  $a_1(x)$  e  $a_2(x)$  as incógnitas.

O operador  $T$  é utilizado em sua forma generalizada, dada abaixo:

$$T \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + p(x)\frac{\partial}{\partial x} + q(x) \quad (\text{C.2})$$

Assim, substituindo-se a expressão (C.1) na transformação linear (C.2), tem-se:

$$\begin{aligned} & a_1(x)\frac{\partial^2 w_1(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial w_1(x)}{\partial x}\frac{\partial a_1(x)}{\partial x} + w_1(x)\frac{\partial^2 a_1(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial a_1(x)}{\partial x}\frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \\ & + a_2(x)\frac{\partial^2 w_2(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial a_2(x)}{\partial x}\frac{\partial w_2(x)}{\partial x} + w_2(x)\frac{\partial^2 a_2(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial a_2(x)}{\partial x}\frac{\partial w_2(x)}{\partial x} \\ & + p(x)\left[a_1(x)\frac{\partial w_1(x)}{\partial x} + w_1(x)\frac{\partial a_1(x)}{\partial x} + a_2(x)\frac{\partial w_2(x)}{\partial x} + w_2(x)\frac{\partial a_2(x)}{\partial x}\right] \\ & + q(x)[a_1(x)w_1(x) + a_2(x)w_2(x)] = r(x) \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

sendo  $r(x)$  a não homogeneidade da solução particular, aplicada em  $T$ .

Sendo os coeficientes arbitrários, pode-se estabelecer a seguinte equação:

$$\frac{\partial a_1(x)}{\partial x} w_1(x) + \frac{\partial a_2(x)}{\partial x} w_2(x) = 0 \quad (\text{C.4})$$

Logo, ao substituir (C.4) em (C.3), verifica-se que:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1(x)}{\partial x} w_1(x) + \frac{\partial a_2(x)}{\partial x} w_2(x) = 0 \\ \frac{\partial a_1(x)}{\partial x} \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} + \frac{\partial a_2(x)}{\partial x} \frac{\partial w_2(x)}{\partial x} = r(x) \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Com o sistema acima, chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1(x)}{\partial x} = \frac{-w_2(x)r(x)}{\left[ \frac{\partial w_2(x)}{\partial x} w_1(x) - \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} w_2(x) \right]} \\ \frac{\partial a_2(x)}{\partial x} = \frac{w_1(x)r(x)}{\left[ \frac{\partial w_2(x)}{\partial x} w_1(x) - \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} w_2(x) \right]} \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Considerando o argumento  $x = \alpha_G r$ , no caso estudado, tem-se:

$$\begin{cases} w_1(x) = J_m(\alpha_G r) \\ w_2(x) = Y_m(\alpha_G r) \\ r(x) = \frac{\delta(\alpha_G(r - r_0))}{4\pi^2 r} = \frac{\delta(r - r_0)}{4\pi^2 r |\alpha_G|} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

sendo que, ao considerar o argumento  $x$  como  $r$ , o termo  $\alpha_G$  aparece na descrição do Wronskiano, equivalentemente ao termo  $|\alpha_G|$  em  $r(x)$  da equação (C.7). Assim, a solução particular pode ser obtida através da integração em  $r$ :

$$\begin{aligned} G_p(\alpha_G r) = & \left[ \int_0^r \frac{-Y_m(\alpha_G \varepsilon) \delta(\varepsilon - r_0) d\varepsilon}{4\pi^2 \varepsilon |\alpha_G| W(J_m(\alpha_G \varepsilon), Y_m(\alpha_G \varepsilon))} \right] J_m(\alpha_G r) \\ & + \left[ \int_0^r \frac{J_m(\alpha_G \varepsilon) \delta(\varepsilon - r_0) d\varepsilon}{4\pi^2 \varepsilon |\alpha_G| W(J_m(\alpha_G \varepsilon), Y_m(\alpha_G \varepsilon))} \right] Y_m(\alpha_G r) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

sendo  $\varepsilon$  uma variável de integração.

Utilizando a expressão para o Wronskiano [108]:

$$W(J_m(\alpha_G r), Y_m(\alpha_G r)) = \frac{2}{\pi(\alpha_G r)} \quad (\text{C.9})$$

Tem-se, de (C.9) em (C.8):

$$G_p(\alpha_G r) = \frac{1}{8\pi} [J_m(\alpha_G r_0) Y_m(\alpha_G r) - J_m(\alpha_G r) Y_m(\alpha_G r_0)] \quad (\text{C.10})$$

## C.2 Demonstração da meromorficidade de (4.11)

Para utilizar a fórmula (4.14) é preciso garantir que (4.11) seja meromorfa e neste apêndice este fato e seu desenvolvimento é explicitado. Primeiro, nota-se que o teste da razão, Teorema B.4, pode ser utilizado no lugar do teste da raiz, Teorema B.3, para a determinação do raio de convergência de uma série de potências no domínio complexo, isto é, para uma sequência de números complexos,  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ , tem-se ([109], capítulo 1, exercício 17):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (\text{C.11})$$

se o limite  $L$  existir.

Para a função de Bessel de primeiro tipo e ordem  $m \in \mathbb{Z}_+$ , tem-se:

$$J_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{1}{2}z)^{m+2n}}{n!(m+n)!} = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[ \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!4^n} \right]}_{a_n} (z)^{2n} \quad (\text{C.12})$$

Mais explicitamente, na forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , tem-se:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!4^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!(m+n+1)!4^{n+1}} \quad (\text{C.13})$$

Fazendo a razão entre termos consecutivos, tem-se:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)n!(m+n)!}{(n+1)!(m+n+1)!4} = \frac{(-1)n(n-1)!(m+n)(m+n-1)!}{(n+1)(n)(n-1)!(m+n+1)(m+n)(m+n-1)!4}$$

que resulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)}{(n+1)(m+n+1)4} \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(1)}{\left| (n+1)(m+n+1)4 \right|}$$

Logo, o teste da razão implica uma relação para o raio de convergência do tipo ([133], capítulo 3, Teorema 3.37):

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \infty$$

Assim, o raio de convergência da função de Bessel de primeiro tipo e ordem

$m \in \mathbb{Z}_+$  é infinito, um resultado bem conhecido. Pelo Teorema B.5 tem-se que a função é holomorfa em todo o plano complexo  $\mathbb{C}$  e, portanto, é inteira. Para a função de Bessel de segundo tipo, procede-se da mesma maneira:

$$Y_m(z) = \underbrace{-\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)! \left(\frac{1}{2}z\right)^{-m+2n}}{n!}}_A + \underbrace{\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{1}{2}z\right) J_m(z)}_B - \underbrace{\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} [\psi(n+1) + \psi(m+n+1)] \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}z\right)^{m+2n}}{n!(m+n)!}}_C$$

sendo  $\psi(1) = -\gamma$ ,  $\psi(k) = -\gamma + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{k}$  e  $\gamma = 0,577215664901532$  [18].

O termo  $A$  é avaliado como se segue:

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)! \left(\frac{1}{2}z\right)^{-m+2n}}{n!} = \left(-\frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \sum_{n=0}^{m-1} \left[ \frac{(m-n-1)!}{n!4^n} \right] (z)^{2n}$$

Em particular, na forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , tem-se:

$$a_n = \frac{(m-n-1)!}{n!4^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(m-n-2)!}{(n+1)!4^{n+1}}$$

Para a razão entre os termos consecutivos, tem-se:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4(n+1)(m-n-1)}$$

Logo, o termo  $A$  é convergente. O termo  $B$  também converge de modo análogo, possuindo, contudo, singularidade essencial em  $z = 0$ , ponto de ramificação. Para o termo  $C$ , a convergência uniforme, para todos os valores positivos de  $m$ , é conseguida seguindo argumento dado por BÔCHER [147] e sumarizado por RUDIN ([133], capítulo 3, Teorema 3.42). Deste modo, a função de Bessel de segundo tipo e ordem  $m \in \mathbb{Z}_+$  também é holomorfa em todo o plano complexo, em cada ramo,  $\mathbb{C}$ , exceto possivelmente na origem [109].

Pela Proposição (B.1) as funções holomorfas são fechadas em relação à multiplicação e adição, assim, o denominador, pelo Teorema B.5, e o numerador da função (4.11) são funções holomorfas. Como toda função holomorfa tem zeros isolados ([109], capítulo 2, Teorema 4.8), conclui-se que a equação (4.11) é uma razão de funções holomorfas e, portanto, meromorfa.

### C.3 Dedução da equação (4.18)

A estratégia de dedução consiste na aplicação cuidadosa das relações de recorrência (4.16) e da equação (4.17) de modo a evitar o aumento da ordem das funções de Bessel resultantes. A derivação a seguir fornece os detalhes omitidos por RIENSTRA e TESTER [39] na obtenção de fórmulas semelhantes.

São utilizadas as relações de recorrência abaixo ([108], capítulo 1, seção 6):

$$\frac{dJ_m(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \begin{cases} J_{m-1}(\varepsilon) - \frac{m}{\varepsilon} J_m(\varepsilon) \\ -J_{m+1}(\varepsilon) + \frac{m}{\varepsilon} J_m(\varepsilon) \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

Os termos acima são substituídos alternadamente nas derivadas de funções de Bessel, como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{dJ'_m(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{dJ_m(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right] = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ -J_{m+1}(\varepsilon) + \frac{m}{\varepsilon} J_m(\varepsilon) \right] \\ &= - \left[ J_m(\varepsilon) - \frac{(m+1)}{\varepsilon} J_{m+1}(\varepsilon) \right] + m \left[ -\frac{J_m(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dJ_m(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right] \\ &= - \left[ J_m(\varepsilon) - \frac{(m+1)}{\varepsilon} J_{m+1}(\varepsilon) \right] + m \left[ -\frac{J_m(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( -J_{m+1}(\varepsilon) + \frac{m}{\varepsilon} J_m(\varepsilon) \right) \right] \\ &= -J_m(\varepsilon) + \frac{J_{m+1}(\varepsilon)}{\varepsilon} - m \frac{J_m(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \frac{m^2}{\varepsilon^2} J_m(\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Finalmente, da equação (4.17) em (C.15), tem-se a equação (4.18).